

PACS 73.22.-f

## К ВОПРОСУ ОБ ЭФФЕКТАХ ЭКРАНИРОВКИ И О СПЕКТРЕ ПЛАЗМОНОВ В ГРАФЕНЕ

Э.А. Пашицкий\*, А.А. Гурин

*Институт физики Национальной академии наук Украины  
проспект Науки 46, Киев 03680, Украина*

*На основе метода функций Грина для продольного (кулоновского) поля в трехслойной системе сред с пространственной и частотной дисперсией рассмотрены эффекты экранировки и спектр плазменных колебаний в графене. Показано, что в моноатомном слое графена экранировка зарядов сводится к их перенормировке, так что асимптотика экранированного потенциала имеет вид  $R^{-1}$ , тогда как в бислое графена экранировка характеризуется степенной асимптотикой вида  $R^{-3}$ . Плазменный спектр в моно- и бислое графена содержит симметричную моду с акустическим законом дисперсии и антисимметричную моду с корневым законом дисперсии.*

### ВВЕДЕНИЕ

Наиболее актуальными в физике твердого тела и в физике поверхности в настоящее время являются исследования свойств и структуры двумерного (2D) кристалла углерода – графена [1, 2], за получение которого А. Гейму и К. Новоселову была присуждена Нобелевская премия в 2010 году. Графен представляет собой монослой атомов углерода с гексагональной кристаллической решеткой и с предсказанным более 60-ти лет назад в работе [3] линейным (дираковским) спектром электронов при малых импульсах в двух эквивалентных долинах в 2D зоне Бриллюэна. С точки зрения химии, графен – это гигантская плоская макромолекула, состоящая из атомов углерода, соединенных ковалентными связями, тогда как с точки зрения физики поверхности свободный моноатомный слой графена можно рассматривать как двустороннюю поверхность. В реальных условиях графен может быть помещен на поверхность какого-либо твердого тела или жидкости, и тогда он представляет собой идеальное моноатомное покрытие. Большой интерес привлекает в последнее время также изучение двойного слоя (бислоя) графена с ван-дер-ваальсовским взаимодействием между монослоями [4].

В десятках тысяч экспериментальных и теоретических работ, посвященных графену, которые были опубликованы за последние пять лет, приведено колоссальное количество результатов по исследованию транспортных,

оптических, структурных и других свойств монослоев и бислоев графена, включая изучение баллистического и туннельного транспорта носителей тока, омической и высокочастотной проводимости, магнетосопротивления, квантового эффекта Холла и др. [5, 6].

Однако все еще остается неудовлетворительным описание эффектов экранировки кулоновского взаимодействия и коллективных плазменных колебаний в графене с высокой концентрацией свободных носителей заряда и с металлическим характером проводимости. Обычно в теоретических исследованиях этих вопросов используются либо простейшие оценки в приближении Томаса-Ферми для квазидвумерных (слоистых) кристаллов и 2D систем [6], либо формализм 2+1 релятивистской квантовой электродинамики для безмассовых заряженных фермионов двух сортов, которые принадлежат двум разным долинам с линейным "дираковским" 2D спектром [7–10]. При этом скорость света формально заменяется на соответствующую такому спектру "фермиевскую" скорость, а экранировка зарядов описывается методом суммирования простых петлевых диаграмм, когда в качестве петли используется поляризационный оператор невзаимодействующих безмассовых фермионов.

В целом такие подходы, в которых описание эффектов экранирования сводится к делению кулоновского матричного элемента на продольную диэлектрическую проницаемость 2D электронного газа, нельзя считать удовлетворительными, поскольку экранировка заря-

\* контактный автор [pashitsk@iop.kiev.ua](mailto:pashitsk@iop.kiev.ua)

дов в монослое или в бислое существенно отличается от их экранировки в изотропном металле или в слоистом кристалле с бесконечным числом периодически расположенных 2D металлических слоев. В случае моно- и бислоя графена необходимо учитывать проникновение электрических полей зарядов в третье измерение, т.е. в окружающее пространство с характерными для него диэлектрическими свойствами.

Такая задача может быть решена на основе метода, развитого ранее в работах [11–15], в которых было получено строгое выражение для функции Грина уравнения Пуассона для потенциала продольного (кулоновского) поля в трехслойной системе, состоящей из трех сред с разными диэлектрическими проницаемостями при учете частотной и пространственной дисперсии сред. При этом учитывались граничные условия непрерывности потенциала и нормальной составляющей вектора электростатической индукции на бесконечно тонких границах раздела сред и предполагалось, что электроны не проникают через эти границы и зеркально отражаются от них. В настоящей работе данный метод используется для описания эффектов статической экранировки и для расчета спектра плазменных колебаний как в монослое, так и в бислое графена с учетом проникновения электрических полей во внешнюю среду.

### ЭКРАНИРОВАННОЕ КУЛОНОВСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯДОВ В ТРЕХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ

Как известно, в слоистых кристаллах, состоящих из периодически расположенных (вдоль оси Z) проводящих металлических или полупроводниковых 2D слоев, матричный элемент неэкранированного кулоновского взаимодействия при условии отсутствия туннелирования электронов между слоями имеет вид [16]

$$V_C(q, q_z) = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon q} \frac{\text{sh } qc}{\text{ch } qc - \text{ch } q_z c}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость кристалла,  $c$  – расстояние между слоями,  $q$  – продольный, а  $q_z$  – поперечный по отношению к плоскости слоев переданные импульсы. Для описания эффектов экранировки в таком кристалле применима обычная процедура суммирования "петлевых" диаграмм, в которых роль "петли" играет поляризационный оператор 2D

электронного газа в слоях  $\Pi_e(q; \omega)$ , зависящий от продольного волнового вектора  $q$  и от частоты  $\omega$ . В результате такого суммирования описание эффекта экранировки, как и в изотропном 3D кристалле, сводится к делению матричного элемента (1) на продольную диэлектрическую проницаемость 2D электронов

$$\varepsilon_e(q, q_z, \omega) = 1 + V_C(q, q_z) \Pi_e(q, \omega). \quad (2)$$

Однако, для одиночного 2D слоя, которому соответствует предельный переход  $c \rightarrow \infty$  когда выражение (1) принимает вид

$$V_C(q) = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon q}, \quad (3)$$

такой метод неприменим, поскольку необходимо последовательно учитывать "провисание" кулоновского поля в окружающую среду с другими диэлектрическими свойствами. В частности, в данном случае неприменимо длинноволновое приближение для экранированного кулоновского потенциала [6]

$$\tilde{V}_C(q) = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon(q + q_{TF})}. \quad (4)$$

Здесь  $q_{TF}$  – обратный радиус экранирования в приближении Томаса-Ферми, который равен  $gme^2/\varepsilon\hbar^2$  для полупроводниковых гетероструктур и бислоев графена либо  $(4\pi g e^2 n / \varepsilon \hbar v_F)^{1/2}$  для монослоя графена, где  $g$  – фактор вырождения по спину и долинам,  $m$  и  $n$  – эффективная масса и концентрация 2D электронов, а  $v_F$  – характерная "фермиевская" скорость, определяющая наклон линейного (безмассового) спектра квазичастиц в монослое графена ( $v_F \approx 10^8$  см/с).

Для корректного описания экранировки кулоновского взаимодействия в графене рассмотрим трехслойную систему, состоящую из сред с разными диэлектрическими проницаемостями:  $\varepsilon_1(\mathbf{k}, \omega)$  в области  $x < 0$ ,  $\varepsilon_2(\mathbf{k}, \omega)$  в области  $0 < x < L$  и  $\varepsilon_3(\mathbf{k}, \omega)$  в области  $x > L$ . Как было показано в [14], функция Грина уравнения Пуассона, описывающая экранированное кулоновское взаимодействие между зарядами, находящимися внутри слоя толщиной  $L$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2(\mathbf{k}, \omega)$ , при учете условий непрерывности электрического потенциала  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  и нормальной составляющей вектора электростатической индукции  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  на бесконечно тонких границах раздела сред имеет вид

$$\begin{aligned}
 D_{22}(q; x, x') = & \\
 = & \{ a_S(x) [(a_S(x') + a_A(x')) (a_A(0) + a_3(L)) + \\
 & + (a_S(x') - a_A(x')) (a_A(0) + a_1(0))] + \\
 & + a_A(x) [(a_S(x') + a_A(x')) (a_S(0) + a_3(L)) - \\
 & - (a_S(x') - a_A(x')) (a_S(0) + a_1(0))] \} / B(q) - \\
 & - 1/2 [b_S(x, x') - b_A(x, x')]; \\
 & (0 < x, x', < L).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 B(q, \omega) = & [a_S(0) + a_1(0)] [a_A(0) + a_3(L)] + \\
 & + [a_S(0) + a_3(L)] [a_A(0) + a_1(0)];
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

$$b_{S,A}(x, x') = \frac{1}{2} [a_{S,A}(x + x') + a_{S,A}(x - x')], \tag{7}$$

$$a_1(x) \equiv a_1(q, \omega; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{\perp} e^{ik_{\perp}x}}{(k_{\perp}^2 + q^2) \varepsilon_1(k_{\perp}, q, \omega)}, \tag{8}$$

$$a_3(x) \equiv a_3(q, \omega; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{\perp} e^{ik_{\perp}(x-L)}}{(k_{\perp}^2 + q^2) \varepsilon_3(k_{\perp}, q, \omega)}, \tag{9}$$

$$a_{S,A}(x) \equiv a_{S,A}(q, \omega; x) = \frac{2}{L} \sum_{k_{\perp}^A} \frac{e^{ik_{\perp}x}}{(k_{\perp}^2 + q^2) \varepsilon_2(k_{\perp}, q, \omega)}, \tag{10}$$

где  $k_{\perp}^S = 2n\pi/L$  – четные и  $k_{\perp}^A = (2n+1)\pi/L$  – нечетные дискретные поперечные импульсы коллективных электронных колебаний с учетом их зеркального отражения на границах раздела сред при  $x=0$  и  $x=L$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). В диэлектрических проницаемостях сред учтены эффекты пространственной дисперсии (зависимость от продольного  $q$  и поперечного  $k_{\perp}$  волновых векторов) и временного запаздывания (зависимость от частоты  $\omega$ ).

Спектр собственных коллективных колебаний электронной плотности (плазмонов) в такой трехслойной системе определяется полюсами функции Грина, т.е. нулями функции  $B(q, \omega)$ . Энергия взаимодействия электронов, находящихся внутри центрального слоя в точках  $x$  и  $x'$  на расстоянии  $R$  в плоскости слоев, с учетом экранировки кулоновского взаимодействия определяется выражением

$$W_{22}(R; x, x') = -2e^2 \int_0^{\infty} q dq J_0(qR) D_{22}(q; x, x'). \tag{11}$$

В дальнейшем будем рассматривать симметричную трехслойную систему, для которой  $\varepsilon_1(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_3(\mathbf{k}, \omega) \equiv \varepsilon_0(\mathbf{k}, \omega)$ . В этом случае соотношения (5) и (6) приводятся к виду

$$\begin{aligned}
 D_{22}(q, \omega; x, x') = & \\
 = & \frac{a_S(x)a_S(x')}{2[a_S(0) + a_0(0)]} + \frac{a_A(x)a_A(x')}{2[a_A(0) + a_0(0)]} - \\
 & - \frac{1}{4} [a_S(x+x') + a_S(x-x') + \\
 & + a_A(x+x') + a_A(x-x')],
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

$$B(q, \omega) = 2[a_S(0) + a_0(0)][a_A(0) + a_0(0)], \tag{13}$$

где  $a_0(0) = a_1(0) = a_3(L)$ . В частном случае, когда слой окружен с двух сторон диэлектрической средой с  $\varepsilon_0 = \text{const}$ , согласно (8) при  $x=0$  и (9) при  $x=L$  получаем  $a_0(0) = 1/q\varepsilon_0$ .

Если электронный спектр в слое является двумерным, то диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_2$  не зависит от  $k_{\perp}$ . При этом из соотношений (10) в результате суммирования по четным и нечетным значениям  $k_{\perp}$  получаем

$$\begin{aligned}
 a_S(0) = & \frac{1}{q\varepsilon_2(q, \omega)} \text{cth} \frac{qL}{2}; \\
 a_A(0) = & \frac{1}{q\varepsilon_2(q, \omega)} \text{th} \frac{qL}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Вследствие расходимости  $a_S(0)$  при  $L \rightarrow 0$  данное рассмотрение справедливо только для слоев конечной толщины.

Если заряд находится в центре слоя в точке  $x=L/2$ , то выражения (10) принимают вид

$$a_S(L/2) = \frac{1}{q\varepsilon_2(q, \omega) \text{sh}(qL/2)}; \quad a_A(L/2) = 0. \tag{15}$$

С другой стороны, из (10) следуют такие правила симметрии

$$a_S(L) = a_S(0); \quad a_A(L) = -a_A(0), \tag{16}$$

что соответствует симметричным (четным) и антисимметричным (нечетным) модам коллективных колебаний электронной плотности в слое. При этом частоты таких симметричных и антисимметричных плазменных мод, согласно (13) и (14), определяются двумя дисперсионными соотношениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(q, \omega) + \varepsilon_0 \operatorname{ctg}(qL/2) &= 0; \\ \varepsilon_2(q, \omega) + \varepsilon_0 \operatorname{tg}(qL/2) &= 0.\end{aligned}\quad (17)$$

Заметим, что в слоистых кристаллах с двумя проводящими слоями в элементарной ячейке также существуют две плазменные ветви, соответствующие синфазным и антифазным колебаниям электронной плотности в соседних слоях [17].

### МОНОСЛОЙ ГРАФЕНА

В случае идеально плоского моноатомного 2D слоя графена роль толщины слоя  $L$  играет размер атома углерода, т.е. удвоенный квантово-механический радиус электронной оболочки атома  $r_0 = 0,091$  нм, который при уровне допирования  $n \sim (10^9 \div 5 \cdot 10^{12}) \text{ см}^{-2}$  мал по сравнению со средним расстоянием между свободными носителями заряда  $\bar{r} = (\pi n)^{-1/2} \approx (2,5 \div 180)$  нм. Это соответствует фермиевским импульсам  $k_F = (4\pi n/g)^{1/2} \approx (5,6 \cdot 10^4 \div 3,9 \cdot 10^6) \text{ см}^{-1}$  при  $g=4$  в единицах постоянной Планка  $\hbar$ . При этом для характерных передаваемых импульсов выполняется условие  $qL \ll 1$ .

Если взаимодействующие заряды расположены в центральной плоскости слоя, когда  $x = x' = L/2$ , то  $a_A(L/2) = 0$ , и функция Грина (12) с учетом первого соотношения (16) принимает вид

$$\begin{aligned}D_{22}(q; L/2, L/2) &= \\ &= \frac{a_s^2(L/2) - a_s^2(0) - a_s(0)a_0(0)}{2[a_s(0) + a_0(0)]}.\end{aligned}\quad (18)$$

При условии  $qL \ll 1$  с точностью до малых квадратичных членов порядка  $(qL)^2$ , согласно первым выражениям в соотношениях (14) и (15), получаем  $a_s(0) \approx a_s(L/2) \approx 2/q^2 L \varepsilon_2(q, \omega)$ , так что выражение (18) сводится к виду

$$D_{22}(q, \omega) \approx -\frac{1}{q[qL\varepsilon_2(q, \omega) + 2\varepsilon_0]}.\quad (19)$$

В длинноволновом приближении для статического предела ( $\omega/q \rightarrow 0$  при  $q \rightarrow 0$ ), когда поляризуемость 2D электронного газа равна плотности состояний на уровне Ферми, продольная диэлектрическая

проницаемость монослоя графена в приближении Томаса-Ферми равна

$$\varepsilon_2(q, 0) = \varepsilon(1 + q_{TF}/q),\quad (20)$$

где  $q_{TF} \sim \sqrt{n}$  благодаря линейному (безмассовому) спектру электронов в монослое графена. В указанном выше интервале концентраций допированных свободных носителей заряда обратная длина экранирования равна  $q_{TF} \sim (9 \cdot 10^4 \div 6,4 \cdot 10^6) \text{ см}^{-1}$ .

Энергия экранированного кулоновского взаимодействия (21), согласно (19) и (20), определяется выражением

$$\begin{aligned}W(R) &= 2e^2 \int_0^\infty \frac{dq J_0(qR)}{qL\varepsilon_2(q, 0) + 2\varepsilon_0} = \\ &= \frac{\pi e^2}{\varepsilon L} \left[ \mathbf{H}_0 \left( R \left( q_{TF} + \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon L} \right) \right) - N_0 \left( R \left( q_{TF} + \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon L} \right) \right) \right],\end{aligned}\quad (21)$$

где  $\mathbf{H}_0(x)$  и  $N_0(x)$  – функции Струве и Неймана.

Заметим, что в отсутствие экранировки зарядов свободными носителями, когда  $q_{TF} = 0$ , этот результат с точностью до знака совпадает с полученным в работе [18] выражением для энергии кулоновского взаимодействия электрона и дырки в тонкой полупроводниковой пленке, окруженной диэлектрической средой.

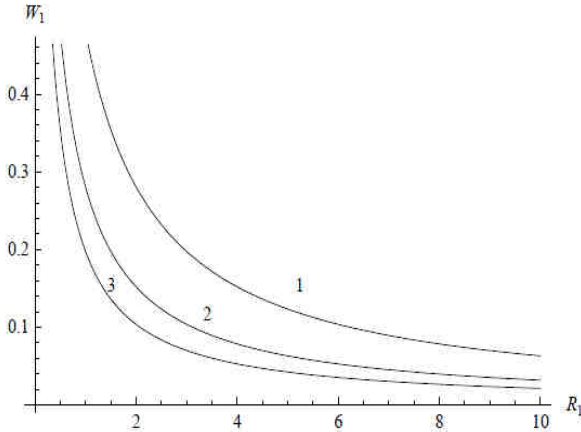
На больших расстояниях асимптотическое выражение (21) с точностью до главных членов имеет вид

$$\begin{aligned}W(R) &\approx \frac{2e^2}{\varepsilon R(q_{TF}L + 2\varepsilon_0/\varepsilon)} \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{L^2}{R^2(q_{TF}L + 2\varepsilon_0/\varepsilon)^2} \right].\end{aligned}\quad (22)$$

При условии  $q_{TF}L \ll 2\varepsilon_0/\varepsilon$ , которое выполняется для монослоя графена при всех уровнях допирования, выражение (22) фактически сводится к неэкранированному кулоновскому взаимодействию двух зарядов, находящихся в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_0$  (см. [18])

$$W(R) \approx \frac{e^2}{\varepsilon_0 R}.\quad (23)$$

Таким образом, в данном случае экранировка практически отсутствует и сводится к перенормировке заряда, так что потенциал приближается к кулоновскому  $\sim R^{-1}$  при  $R \rightarrow \infty$ . На рис. 1 показана зависимость  $W(R)$  от расстояния между зарядами  $R$  для разных уровней допирования.



**Рис. 1.** Радиальная зависимость безразмерного экранированного кулоновского потенциала зарядов в монослое графена  $W_1 = W\epsilon L / \pi e^2$  от безразмерного расстояния между зарядами  $R_1 = R(q_{TF} + 2\epsilon_0/\epsilon L)$  при разных уровнях допирования (величина  $q_{TF}$  возрастает для кривых 1, 2, 3)

Следует заметить, что непосредственное вычисление экранированного кулоновского потенциала на основе матричного элемента (4) приводит к следующему результату

$$\begin{aligned} \tilde{V}_C(R) &= \frac{e^2}{\epsilon} \int_0^\infty \frac{q dq J_0(qR)}{q + q_{TF}} = \\ &= \frac{e^2}{\epsilon} \left\{ \frac{1}{R} - \frac{\pi q_{TF}}{2} [\mathbf{H}_0(q_{TF}R) - N_0(q_{TF}R)] \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

На больших расстояниях, когда  $q_{TF}R \gg 1$ , с точностью до первого неисчезающего члена получаем следующее асимптотическое выражение

$$\tilde{V}_C(R) \approx \frac{e^2}{\epsilon q_{TF}^2 R^3}, \quad (25)$$

которое радикально отличается от полученного выше потенциала "кулоновского" типа (22) и применимо только для слоистых кристаллов на расстоянии  $R$ , малом по сравнению с расстоянием между слоями, тогда как при  $R \gg \dots$

экранировка становится экспоненциальной, как в изотропном 3D металле.

Для высокочастотного предела ( $q/\omega \rightarrow 0$  при  $q \rightarrow 0$ ), когда электронный поляризационный оператор  $\Pi_e(q; \omega) \sim q^2/\omega^2$ , продольная диэлектрическая проницаемость графена равна

$$\epsilon_2(q, \omega) = \epsilon \left[ 1 - \frac{\omega_{pl}^2(q)}{\omega^2} \right]; \quad (26)$$

$$\omega_{pl} = \left[ \frac{2e^2 v_F q \sqrt{\pi n}}{\epsilon \hbar^2} \right]^{1/2}.$$

Корневая зависимость плазменной частоты  $\omega_{pl}$  от  $q$  в (26) обусловлена обратно пропорциональной зависимостью от  $q$  кулоновского матричного элемента 2D слоя (3), в отличие от изотропных 3D кристаллов, в которых  $V_C(q) = 4\pi e^2/q^2$ , так что плазменная частота не зависит от  $q$  при  $q \rightarrow 0$ . Как следует из выражений (17) и (26), симметричная и антисимметричная моды плазменных колебаний в монослое графена определяются соотношениями

$$\omega_s(q) = \omega_{pl}(q) \sqrt{\frac{qL}{2\epsilon_0/\epsilon + qL}} = \quad (27)$$

$$= q \left[ \frac{2e^2 v_F L \sqrt{\pi n}}{\hbar(2\epsilon_0/\epsilon + \epsilon qL)} \right]^{1/2};$$

$$\omega_A(q) = \frac{\omega_{pl}(q)}{\sqrt{1 + qL\epsilon_0/2\epsilon}} = \left[ \frac{4e^2 v_F q \sqrt{\pi n}}{\hbar(2\epsilon + \epsilon_0 qL)} \right]^{1/2}. \quad (28)$$

Как видим, для симметричной моды характерна линейная зависимость от  $q$  при  $qL \ll 2\epsilon_0/\epsilon$ , тогда как антисимметричная мода сохраняет корневую зависимость от  $q$  при  $qL \ll 2\epsilon/\epsilon_0$ .

## БИСЛОЙ ГРАФЕНА

В рамках данного метода бислои графена можно представить как слой диэлектрической среды с  $\epsilon_2 = \text{const}$  в области  $0 \leq x \leq L$ , где  $L$  равно расстоянию между монослоями графена  $d \sim 0,3$  нм. В этом случае взаимодействующие заряды (электроны, дырки) сосредоточены в монослоях графена, т.е. на границах бислоя при  $x=0$  и  $x=L$ . В связи с этим кулоновская функция Грина принимает вид

$$\tilde{D}(q, \omega) = D_{22}(q, \omega; 0, 0) + D_{22}(q, \omega; 0, L) + D_{22}(q, \omega; L, 0) + D_{22}(q, \omega; L, L), \quad (29)$$

где с учетом эквивалентности 2D слоев графена, согласно (12) и (13), получаем

$$D_{22}(q, \omega; 0, 0) = D_{22}(q, \omega; L, L) = \frac{a_S^2(0)}{2[a_S(0) + a_0(0)]} + \frac{a_A^2(0)}{2[a_A(0) + a_0(0)]} - \frac{1}{2}[a_S(0) + a_A(0)]; \quad (30)$$

$$D_{22}(q, \omega; 0, L) = D_{22}(q, \omega; L, 0) = \frac{a_S^2(0)}{2[a_S(0) + a_0(0)]} - \frac{a_A^2(0)}{2[a_A(0) + a_0(0)]} - \frac{1}{2}[a_S(0) - a_A(0)]. \quad (31)$$

Здесь использованы свойства симметрии  $a_S(2L) = a_S(0)$  и  $a_A(2L) = a_A(0)$ . Таким образом, с учетом (30) и (31) получаем

$$\tilde{D}(q, \omega) = 4D_{22}(q, \omega) = -\frac{2a_S(0)a_0(0)}{a_S(0) + a_0(0)}. \quad (32)$$

При этом экранированный кулоновский потенциал в статическом пределе выражается формулой

$$\tilde{W}(R) = 4e^2 \int_0^\infty q dq J_0(qR) \frac{a_S(0)a_0(0)}{a_S(0) + a_0(0)} = 4e^2 \int_0^\infty dq \frac{J_0(qR)}{\varepsilon_0 + \varepsilon_2(q, 0) \text{th}(qL/2)}. \quad (33)$$

Здесь  $\varepsilon_2(q, 0)$  – определяется выражением (20) с независящим от концентрации  $n$  допированных носителей импульсом Томаса-Ферми  $q_{TF} = 4m^*e^2/\varepsilon\hbar^2$ , где  $m^*$  – эффективная масса квазичастиц в бислое графена ( $m^* \approx 0,05m_e$  – массы электрона). В частности, для больших импульсов, когда  $qL \gg 1$  и  $\text{th}(qL/2) \approx 1$ , получаем выражение (ср. с (24))

$$\tilde{W}(R) = \frac{4e^2}{(\varepsilon_0 + \varepsilon)R} \times \left\{ 1 - \frac{\pi\varepsilon q_{TF}R}{2(\varepsilon + \varepsilon_0)} \left[ \mathbf{H}_0\left(\frac{\varepsilon q_{TF}R}{\varepsilon + \varepsilon_0}\right) - N_0\left(\frac{\varepsilon q_{TF}R}{\varepsilon + \varepsilon_0}\right) \right] \right\}. \quad (34)$$

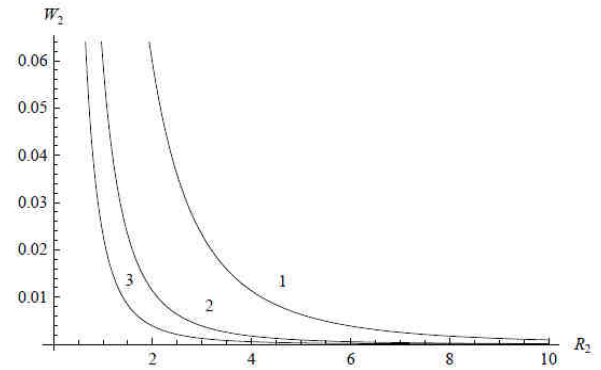
На малых расстояниях, когда выполняется условие  $q_{TF}R \ll (\varepsilon + \varepsilon_0)/\varepsilon$ , но  $R > L$ , потенциал (34) ведет себя аналогично экранированному потенциалу в 3D металле

$$\tilde{W}(R) \approx \frac{e^2}{R} \exp\left\{-\frac{\varepsilon q_{TF}R}{\varepsilon + \varepsilon_0}\right\}. \quad (35)$$

Однако, на больших расстояниях, когда  $q_{TF}R \gg (\varepsilon + \varepsilon_0)/\varepsilon$ , экранированный кулоновский потенциал (34) характеризуется степенной асимптотикой  $R^{-3}$  (ср. с (25))

$$\tilde{W}(R) \approx \frac{4e^2(\varepsilon + \varepsilon_0)}{\varepsilon^2 q_{TF}^2 R^3}. \quad (36)$$

На рис. 2 показаны радиальные зависимости потенциала (34) для разных соотношений между диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_0$ .



**Рис. 2.** Радиальная зависимость безразмерного экранированного потенциала взаимодействия двух зарядов в бислое графена  $W_2 = \tilde{W}(\varepsilon_0 + \varepsilon)/4e^2 q_{TF} \varepsilon$  от безразмерного расстояния между зарядами  $R_2 = \varepsilon q_{TF} R/(\varepsilon_0 + \varepsilon)$  для разных соотношений между диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_0$  (величина  $\varepsilon_0/\varepsilon$  убывает для кривых 1, 2, 3)

В длинноволновом приближении  $qL \ll 1$  для  $L = d \gg r_0$  с точностью до малых квадратичных членов порядка  $(qL)^2$  остаются справедливыми все предыдущие результаты по экранировке и плазменным колебаниям (21)–(28), но для плазменной частоты вида

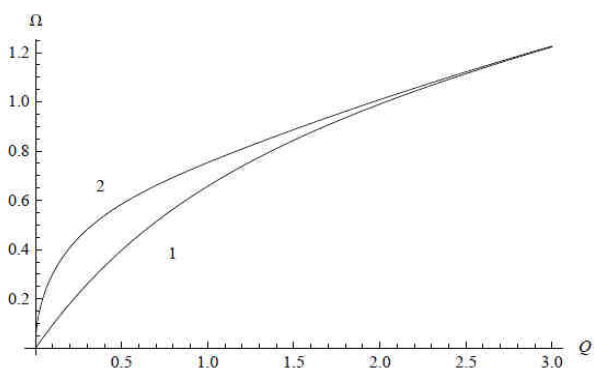
$$\tilde{\omega}_{pl}(q) = \left( \frac{2\pi n e^2 q}{\varepsilon m^*} \right)^{1/2}. \quad (37)$$

Однако в области импульсов  $qL \geq 1$  дисперсия плазмонов является более сложной

$$\omega_S(q) = \frac{\tilde{\omega}_{pl}(q)}{\sqrt{1 + \epsilon_0 / \epsilon \cdot \text{cth}(qL/2)}}; \quad (38)$$

$$\omega_A(q) = \frac{\tilde{\omega}_{pl}(q)}{\sqrt{1 + \epsilon_0 / \epsilon \cdot \text{th}(qL/2)}}.$$

На рис. 3 показаны законы дисперсии симметричной и антисимметричной плазменных ветвей.



**Рис. 3.** Законы дисперсии симметричной (1) и антисимметричной (2) мод плазменных колебаний в моно- и бислое графена ( $\Omega = \omega_{S,A}/\omega_{pb}$ ,  $Q = qL$ )

### ВЫВОДЫ

Таким образом, полученные в настоящей работе результаты показывают, что экранировка зарядов и плазменные колебания в монослоях и бислоях графена могут существенно отличаться от соответствующих эффектов как в изотропных, так и в слоистых макроскопических кристаллах. В частности, на больших расстояниях экранированный кулоновский потенциал в монослое графена убывает как  $R^{-1}$ , а в бислое – по степенному закону  $R^{-3}$ . Спектр симметричной (четной) моды плазменных колебаний в графене имеет акустический закон дисперсии, а спектр антисимметричной (нечетной) плазменной моды характеризуется корневым законом дисперсии, по аналогии с 2D системами.

В заключение авторы выражают благодарность В.П. Гусынину, И.В. Криве, С.М. Рябченко, А.В. Семенову и С.Г. Шарпову за полезное обсуждение вопросов, затронутых в данной работе.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V. et al.* Reports electric field effect in atomically thin carbon films // *Science*. – 2004. – V. 306. P. 666–669.
2. *Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V. et al.* Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene. // *Nature*. – 2005. – V. 438. – P. 197–200.
3. *Wallace P.R.* The band theory of graphite. // *Phys. Rev.* – 1947. – V. 71, N 9. – P. 622–634.
4. *Morozov S.V., Novoselov K.S., Katsnelson M.I. et al.* Giant intrinsic carrier mobilities in graphene and its bilayer // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – V. 100, N 1. – id 016602.
5. *Abergel D.S.L., Apalkov V., Berashevich J.* Properties of graphene: A theoretical perspective // *Adv. Phys.* – 2010. – V. 59, N 4. – P. 261–482.
6. *Das Sarma S., Shaffique A., Hwang E.H., E. Rossi* Electronic transport in two dimensional graphene. – 2010. – arXiv: 1003.4731v2 [cond-mat.mes-hall].
7. *Gusynin V.P., Sharapov S.G.* Unconventional integer quantum hall effect in graphene // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – V. 95, N 14. – P. 146801 (1–4).
8. *Gusynin V.P., Sharapov S.G.* Transport of Dirac quasiparticles in graphene: Hall and optical conductivities // *Phys. Rev. B.* – 2006. – V. 73, N 24. – P. 245411(1–18).
9. *Gusynin V.P., Miransky V.A., Sharapov S.G., Shovkovy I.A.* Excitonic gap, phase transition, and quantum Hall effect in graphene // *Phys. Rev. B.* – 2006. – V. 74, N 19. – P. 195429(1–10).
10. *Gusynin V.P., Sharapov S.G., Carbotte J.P.* On the universal AC optical background in graphene // *New J. Phys.* – 2009. – V. 11, N 9. – doi:10.1088/1367-2630/11/9/095013.
11. *Романов Ю.А.* К теории характеристических потерь в тонких пленках // *ЖЭТФ*. – 1964. – Т. 47, № 6. – С. 2119–2133.
12. *Пашицкий Э.А., Романов Ю.А.* Плазменные волны и сверхпроводимость в квантовых полупроводниковых (полуметаллических) пленках и слоистых структурах // *Укр. Физ. Журн.* – 1970. – Т. 15, № 10. – С. 1594–1606.
13. *Габович А.М., Ильченко Л.Г., Пашицкий Э.А., Романов Ю.А.* Экранирование

- заряда и фриделевские осцилляции в металлах с различной формой поверхности Ферми // ЖЭТФ. – 1978. – Т. 75, № 1. – С. 249–264.
14. Ильченко Л.Г., Пашицкий Э.А., Романов Ю.А. Электростатический потенциал зарядов в слоистых системах с пространственной дисперсией // Физ. твердого тела. – 1980. – Т. 22, № 9. – С. 2700–2710.
  15. Ильченко Л.Г., Пашицкий Э.А. Взаимодействие зарядов в слоистых системах // Физ. твердого тела. – Т. 22, № 11. – С. 3395–3401.
  16. Fetter A.L. Electrodynamics of a layered electron gas. II. Periodic array // Ann. Phys. – 1974. — V. 88. – P. 1–25.
  17. Griffin A., Pindor A.J. Plasmon dispersion relations and the induced electron interaction in oxide superconductors: Numerical results // Phys. Rev. B. – 1989. – V. 39, N 16 – P. 11503–11514.
  18. Келдыш Л.В. Кулоновское взаимодействие в тонких пленках полупроводников и полуметаллов // Письма в ЖЭТФ. – 1979. – Т. 29, № 11. – С. 716–719.

Поступила 30.01.2011, принята 09.02.2011

## Про ефект екранування та спектр плазмонів у графені

Е.А. Пашицкий, О.О. Гурін

*Институт фізики Національної академії наук України  
пр. Науки 46, Київ 03680, Україна, pashitsk@iop.kiev.ua*

*Використовуючи метод функцій Гріна для позовжнього (кулонівського) поля в тришаровій системі середовищ з просторовою та частотною дисперсією, розглянуто ефекти екранування та спектр плазмових коливань в графені. Показано, що в моноатомному шарі графену екранування зарядів зводиться до їх перенормування, визначаючи асимптотику екранованого потенціалу у вигляді  $R^{-1}$ , тоді як у бішарі графену екранування характеризується степеневою асимптотикою виду  $R^{-3}$ . Плазмовий спектр в моно- та бішарі графену має симетричну моду з акустичним законом дисперсії й антисиметричну моду з кореневим законом дисперсії.*

## On the Screening Effects and Plasmon Spectrum in Graphene

E.A. Pashitskii, A.A. Gurin

*Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
46 Nauky Avenue, Kyiv 03028, Ukraine, pashitsk@iop.kiev.ua*

*Basing on the method of Green functions for longitudinal (Coulomb) field in three-layer system of media with spatial and frequency dispersion, the screening effects and spectrum of plasma oscillations in graphene are considered. In graphene monolayer the screening of charges comes to their renormalization, so that asymptotic of the screening potential is  $R^{-1}$  whereas the screening in graphene bilayers is characterized by  $R^{-3}$  power asymptotics. The plasma spectrum in graphene mono- and bilayer has a symmetric mode with acoustic dispersion law and an antisymmetric one with root dispersion law.*