

УДК 535:537:539:546

ВРАХУВАННЯ КІНЦЕВОЇ ШВИДКОСТІ ПОШИРЕННЯ ТЕПЛА ПРИ ЛАЗЕРНОМУ РОЗІГРІВІ ПОВЕРХНІ ТВЕРДОГО ТІЛА

Л.В. Породько*, Л.Б. Лерман, О.Ю. Семчук

*Інститут хімії поверхні ім. О.О. Чуйка Національної академії наук України
вул. Генерала Наумова 17, Київ 03164, Україна*

Розглянуто теплові ефекти, обумовлені лазерним опроміненням зовнішньої поверхні твердого тіла, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у твердому тілі. Проведено чисельні розрахунки розподілу температури на поверхні твердого тіла при різній ширині смуги дії лазерного випромінювання. Отримана аналітична оцінка похибки, що виникає без врахування кінцевої швидкості поширення тепла. Показано, що збільшення періоду одновимірної інтерференційної картини приводить до локалізації максимальних значень температури в зоні дії лазерних пучків. Цей ефект збільшується при врахуванні кінцевої швидкості поширення тепла.

ВСТУП

При взаємодії потужного лазерного випромінювання з речовиною відбувається поглинання світлової енергії, яка перетворюється в енергію хаотичного теплового руху атомів та молекул. Такі характеристики твердого тіла як теплопровідність, теплоємність, щільність тощо залежать від температури та тривалості дії лазерного імпульсу. При дії серії короткодючих (10^{-15} – 10^{-12} с) лазерних імпульсів високої інтенсивності тепла енергія, що генерується на поверхні твердого тіла лазерним випромінюванням, не встигає поширитись на значну відстань від місця дії лазерного пучка. Через кінцеве значення фазової швидкості поширення теплових коливань вільних електронів. У зв'язку з цим виникає необхідність врахування кінцевої швидкості поширення тепла по поверхні твердого тіла при різного роду теплофізичних розрахунках, насамперед, за допомогою гіперболічного рівняння теплопровідності [1]. Раніше в [2–4] розв'язані задачі лазерного нагріву для системи періодичних джерел без врахування кінцевого значення швидкості поширення тепла, в даній роботі встановлено умови застосування гіперболічного рівняння теплопровідності для описання лазерного нагріву поверхні твердого тіла. Для одновимірної періодичної задачі отримано аналітичну оцінку розбіжності між розв'язками параболічних та гіперболічних рівнянь, тобто похибки, яка може виникнути при неврахуванні кінцевої швидкості поширення тепла.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ І ОСНОВНІ РОЗРАХУНКОВІ ФОРМУЛИ

Розглянемо тверде тіло (метал, напівпровідник), зовнішня поверхня якого опромінюється двома когерентними світловими пучками, які створюють одновимірну інтерференційну картину, схематично зображену на рис. 1. Під дією такої системи джерел на поверхні твердих тіл виникають періодичні структури, які повторюють період джерел і спостерігаються в експерименті [5] Приклад такого утворення наведено на рис. 2.

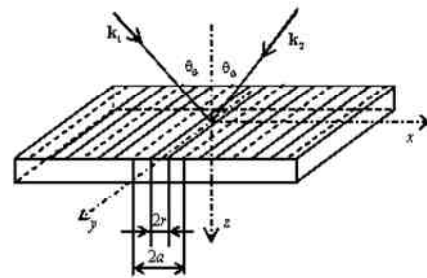


Рис. 1. Одновимірні інтерференційна картина на поверхні твердого тіла, що створюється двома лазерними пучками

Виходимо з гіперболічного рівняння теплопровідності, яке можна записати у вигляді [1]

$$\frac{1}{\chi} \frac{dT}{dt} + \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \Delta T + \frac{1}{cr} f(x, y, z, t), \quad (1)$$

де T – температура, t – час, $\chi = \lambda / (cr)$ – коефіцієнт температуропровідності (λ – коефіцієнт

* контактний автор lilphys@mail.ru

теплопровідності, ρ – густина), $w = \sqrt{\xi/\tau_p}$ – швидкість поширення теплової хвилі, τ_p – час релаксації теплового потоку, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ – трьохвимірний оператор Лапласа, x, y, z – декартові координати (рис. 1), $f(x, y, z, t)$ – функція джерел, яка включає і лазерні джерела тепла.

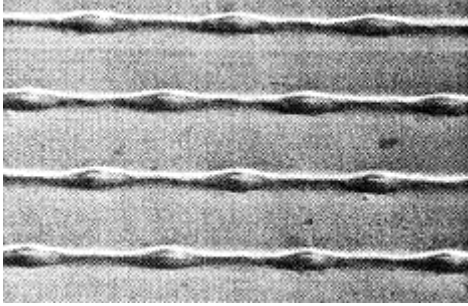


Рис. 2. Структури, які утворюються на поверхні твердого тіла внаслідок інтерференції двох пучків [5]

Задача розглядається за нульових початкових умов і умов періодичності на межах періоду смуг. На поверхні $z=0$ приймаються умови відсутності теплообміну, тобто $\partial T / \partial z|_{z=0} = 0$.

Для одновимірної періодичної системи для функції джерел, як і раніш [2–4], прийемо гауссівський розподіл у просторі, вважаючи, що пучок локалізується на смузі, шириною $2a$

$$f(x, z, t) = (1-R)J_0 \exp(-\alpha^* z) \exp(-x^2/a^2) g(t), \quad (2)$$

де R – коефіцієнт віддзеркалення, α^* – коефіцієнт поглинання, J_0 – інтенсивність лазерного випромінювання, $g(t)$ – функція, яка задає форму лазерного імпульсу у часі [3, 4].

Для металів $\tau_p = 10^{-11}$ с; для азоту $\tau_p = 10^{-9}$ с; для аморфних тіл типу неорганічного скла і полімерів, що мають складну структуру, час релаксації досягає значень (10^{-7} – 10^{-5}) с. Експериментальне вимірювання τ_p у багатьох випадках неможливе. Відповідно, швидкості розповсюдження тепла становлять: для сталі, $w = 1300$ м/с; для алюмінію, $w = 2930$ м/с, що перевищує швидкість розповсюдження звуку; для азоту $w = 150$ м/с. Для газів в умовах розрядженого надзвукового потоку вплив кінцевої швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним. Подібний вплив може виявлятися також при дуже низьких температурах (наприклад, в рідкому гелії $w = 19$ м/с при $T = 14$ К), а при звичайних температурах у твердих тілах, коли в нестационарному процесі розглядається малий період часу.

Рівняння (1) переходить у звичайне рівняння теплопровідності, коли $w \rightarrow \infty$, тобто швидкість поширення тепла вважається нескінченною. Раніше нами [2–4] для знаходження просторового та часового розподілу температури на поверхні твердого тіла використовувалось кінцеве інтегральне перетворення по координатах (x, y) та косинус-перетворення Фур'є по координаті z . Послідовне виконання цих перетворень (незалежно в якій послідовності) приводить до сімейства неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку по часу. Розв'язок останніх виписується за допомогою інтегралів Дюамеля. Перехід у простір оригіналів дає аналітичний розв'язок задачі у вигляді збіжних рядів та інтегралу.

Застосуємо цей підхід для розв'язання рівняння (1). На першому кроці в результаті використання кінцевого інтегрального перетворення з ядром $K_m(x) = \cos(\lambda_m x)$, де $\lambda_m = m\pi$, m – ціле число, a – півперіод ґратки, що створюється на поверхні твердого тіла при інтерференції двох лазерних пучків (рис.1), отримаємо рівняння

$$\frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 T_m}{\partial t^2} + \frac{\partial T_m}{\partial t} = -\chi(\lambda_m^2) T_m + \chi \frac{\partial^2 T_m}{\partial z^2} + \alpha J_m(z, t), \quad (3)$$

де образами перетворення є:

$$T_m(z, t) = \int_{-a}^a T(x, z, t) K_m(x) dx,$$

$$J_m(z, t) = \int_{-a}^a J(x, z, t) K_m(x) dx, \quad \alpha = \alpha^*/(c\rho).$$

Для розв'язання рівняння (3) застосуємо косинус-перетворення Фур'є з ядром $\cos \xi z$, де ξ – змінна перетворення. Його застосування приводить до сімейства звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, які мають вигляд:

$$\frac{1}{w^2} \frac{d^2 T_m^F}{dt^2} + \frac{dT_m^F}{dt} = -\chi(\lambda_m^2 + \xi^2) T_m^F + \alpha J_m^F(\xi, t), \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} T_m^F(\xi, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T_m(z, t) \cos \xi z dz, \quad J_m^F(\xi, t) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty J_m(z, t) \cos \xi z dz. \end{aligned} \quad (5)$$

Початкова умова для функцій $T_m^F(t)$ приймається нульовою, тобто $T_m^F(t) = 0$. Застосуємо для розв'язання задачі інтеграл Дюамеля для довільної форми лазерного імпульсу

$$\begin{aligned} T_m^F(\xi, t) &= \alpha \int_0^t h_+(t-\tau) J_m^F(\xi, \tau) d\tau = \\ &= \alpha \int_0^t h_+(t) J_m^F(\xi, t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

де $h_+(t-\tau)$ – це нормальна реакція на одиничний імпульс [6].

Для знаходження h_+ потрібно розв'язати рівняння (штрих означає похідну за часом)

$$\tau_\beta h_+''(t) + h_+'(t) + \chi(\lambda_m^2 + \xi^2) h_+(t) = 0 \quad (7)$$

за спеціальних початкових умов [6]

$$h_+(0) = 0; h_+'(0) = 1 / \tau_\beta \quad (8)$$

Розв'язок має вигляд

$$h_+(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-4\tau_p(\lambda_m^2 + \xi^2)}} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}), \quad (9)$$

де λ_1, λ_2 – корені характеристичного рівняння, які визначаються за формулами

$$\lambda_{1,2} = \left[-1 \pm \sqrt{1-4\tau_p\chi(\lambda_m^2 + \xi^2)} \right] / (2\tau_p).$$

Отже, в просторі зображень розв'язок побудовано. Тепер, послідовно повертаючись в простір оригіналів, будемо мати формальний розв'язок для імпульсу довільної форми

$$\begin{aligned} T_m(z, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^\infty T_m^F(\xi, t) \cos \xi z d\xi = \\ &= \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^\infty \cos \xi z d\xi \int_0^t \exp\{-\chi(\lambda_m^2 + \xi^2)t\} J_m^F(\xi, t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Обернення кінцевого інтегрального перетворення дається рядом. Тому для розподілу температури отримаємо кінцевий вираз

$$T(x, z, t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\|K_m\|^2} T_m(z, t) K_m(x), \quad (11)$$

де квадрат норми задається інтегралом

$$\|K_m\|^2 = \int_{-a}^a \cos^2(\lambda_m x) dx. \quad (12)$$

Отже, в розгорнутому вигляді розв'язок задачі знаходження просторового та часового розподілу температури при лазерному нагріві поверхні твердого тіла з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла матиме вигляд:

$$\begin{aligned} T(x, z, t) &= \sum_{m=0}^\infty \frac{\alpha}{\|K_m\|^2} \times \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^\infty \cos \xi z d\xi \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-4\tau_p(\lambda_m^2 + \xi^2)}} \times \right. \\ &\left. \times (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) J_m^F(\xi, t-\tau) d\tau \right\} K_m(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким чином, отримано загальний аналітичний розв'язок гіперболічного рівняння теплопровідності для одновимірної періодичної задачі.

ОЦІНКА ПОХИБКИ, ЯКА ВИНИКАЄ БЕЗ ВРАХУВАННЯ КІНЦЕВОЇ ШВИДКОСТІ ПОШИРЕННЯ ТЕПЛА

Проведемо асимптотичну оцінку отриманого розв'язку у просторі зображень. По-перше, зазначимо, що при $\tau_3 \rightarrow 0, w \rightarrow \infty$ будемо мати: $\lambda_1 \rightarrow -\infty$ і, отже, $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$, а $\lambda_2 \rightarrow -\chi(\lambda_m^2 + \xi^2)$. Тоді нормальна реакція на одиничний імпульс для параболічного рівняння теплопровідності в просторі зображень, який отриманий в роботах [2–4] безпосередньо, матиме вигляд:

$$h_+(t) = \exp\{-\chi(\lambda_m^2 + \xi^2)t\}. \quad (14)$$

Далі будемо позначати розв'язок (9) верхнім індексом f , тобто $h_+^f(t)$, а для параболічного рівняння збережемо позначення $h_+(t)$.

Із врахуванням вписаних вище границь, якщо $\tau_p \rightarrow 0$, то $h_+^f(t) \rightarrow h_+(t)$ і розв'язки будуть співпадати. В загальному випадку будемо мати для відносної похибки розв'язків ε вираз

$$\varepsilon = \frac{h_+}{h_+^f} = \frac{\sqrt{1-4\tau_p(\lambda_m^2 + \xi^2)} \exp\{-\chi(\lambda_m^2 + \xi^2)t\}}{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}. \quad (15)$$

За малих значень τ_p , що, як показано вище, майже завжди має місце, після розкладу відповідних функцій в ряди з утриманням перших доданків будемо мати для оцінки похибки при врахуванні кінцевої швидкості поширення тепла вираз

$$\frac{h_+}{h_+^f} = \frac{\tau_p}{t} \left[2\chi(\lambda_m^2 + \xi^2) \tau_p \right] + 1. \quad (16)$$

Як видно з цієї формули, оцінка похибки, яка виникає, якщо не враховувати кінцеву швидкість поширення тепла, залежить від часу релаксації, коефіцієнта температуропровідності, коефіцієнтів розкладу та буде різною для різних значень часу. Вона прямує до 0, коли $t \rightarrow \infty$. Крім того, для різних членів розкладу розходження буде різним, а із збільшенням часу релаксації похибка збільшується.

Ця оцінка отримана в просторі зображень. В просторі оригіналів потрібно обчислити наступний інтеграл

$$\begin{aligned} |T - T_f| &= \sum_{m=0}^\infty \frac{\alpha}{\|K_m\|^2} \times \\ &\times \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^\infty \cos \xi z d\xi \int_0^t |h_+(t-\tau) - h_+^f(t-\tau)| I_m^F(\xi, \tau) d\tau K_m. \end{aligned} \quad (17)$$

Його значення суттєво залежить від форми імпульсу і вимагає обчислення в кожному конкретному випадку. Маючи оцінку (16), це неважко зробити при розгляді конкретних практичних задач.

ВИСНОВКИ

Розроблено методику розв'язання гіперболічного рівняння теплопровідності для одновимірної періодичної системи джерел. Отримано аналітичні розв'язки цієї задачі у вигляді збіжного ряду та інтегралу для довільної форми імпульсу. Встановлено асимптотичну оцінку розбіжності між розв'язками рівнянь теплопровідності параболічного та гіперболічного типів, яка залежить від коефіцієнтів розкладу, коефіцієнта температуропровідності, часу релаксації та буде різною для різних значень часу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – Москва: Гостехиздат, 1952. – 392 с.
2. *Semchuk O.Yu., Grechko L.G., Lerman L.B. et al.* Thermal effects caused interaction of powerful laser radiation of condensed matter // *J. Optoelect. Adv. Mat.* – 2010. – V. 12, N. 3. – P. 586–588.
3. *Семчук А.Ю., Гречко Л.Г., Горбик П.П., Лерман Л.Б.* Лазер индуцированные периодические поверхностные структуры в полупроводниках // *Химия, физика и технология поверхности.* – 2007. – Вып. 13. – С. 34–47.
4. *Шпак А.П., Гречко Л.Г., Куницкая Л.Ю. та ін.* Периодичні структури, індуковані на поверхні твердих тіл інтерференцією лазерних пучків. Теплові ефекти // *Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології.* – 2007. – Т. 5, № 3. – С. 683–718.
5. *Lasgani A., Holzappel C., Muklich F.* Periodic pattern formation of intermetallic phases with long range order by laser interference metallurgy // *Adv. Eng. Matter.* – 2005. – V. 7, N 6. – P. 487–491.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – Москва: Наука, 1973. – 831 с.

Надійшла 31.05.2011, прийнята 06.06.2011

Учет конечной скорости распространения тепла при лазерном разогреве поверхности твердого тела

Л.В. Породько, Л.Б. Лерман, А.Ю. Семчук

*Институт химии поверхности им. А.А. Чуйко Национальной академии наук Украины
ул. Генерала Наумова 17, Киев 03164, Украина, lilphys@mail.ru*

Рассмотрены тепловые эффекты, обусловленные лазерным облучением внешней поверхности твердого тела, с учетом конечной скорости распространения тепла. Проведены численные расчеты распределения температуры по поверхности твердого тела при разной ширине полосы действия лазерного излучения. Получено аналитическое выражение для погрешности, связанной с учетом конечной скорости распространения тепла. Показано, что увеличение периода интерференционной картины приводит к локализации максимальных значений температуры в зоне действия лазерных пучков. Этот эффект увеличивается при учете конечной скорости распространения тепла.

On Counting Limited Speed of Heat Expansion for Laser Heating of Solid Surface

L. Porodko, L. Lerman, O. Semshuk

*Chuiiko Institute of Surface Chemistry of National Academy of Sciences of Ukraine
17 General Naumov Street, Kyiv 03164, Ukraine, lilphys@mail.ru*

The thermal effects are considered caused by the laser irradiation of external of solid surface with taking limited speed of heat expansion into account. Numeral calculations are presented on temperature distribution through the solid surface for different action band widths of laser radiation. An analytical expression has been got for the error evaluated due to taking into account the limited speed of heat expansion. The increase in the period of interference picture has been shown to result in localization of maximum values of temperature within the action zone of laser beams. This effect increases provided the limited speed of heat expansion is taken into account.