

Н.Г. Шкода<sup>1</sup>, Т.Е. Корочкова<sup>1</sup>, В.М. Розенбаум<sup>1</sup>, К.М. Шевцова<sup>2</sup>, И.В. Шапочкина<sup>2</sup>

## ОДНОСТОРОННЕЕ УШИРЕНИЕ ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СКОРОСТИ БРОУНОВСКОГО МОТОРА

<sup>1</sup> Институт химии поверхности им. А.А. Чуйко Национальной академии наук Украины  
ул. Генерала Наумова, 17, Киев, 03164, Украина, E-mail: ngshkoda@gmail.com

<sup>2</sup> Белорусский государственный университет, Физический факультет  
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Республика Беларусь

Известно, что ширины спектральных линий предоставляют исследователю разнообразную важную информацию: о свойствах материалов, характере взаимодействия частиц вещества, физических параметрах среды и т.д. По аналогии с изучением спектральных линий, в данной статье исследуется поведение ширины колоколообразной частотной зависимости средней скорости броуновских частиц, описываемых моделью стохастического броуновского мотора с асимметричными дихотомными флуктуациями потенциальной энергии частицы. Колоколообразный вид зависимости скорости от частоты флуктуаций объясняется исчезновением моторного эффекта в низко- и высокочастотном пределах. Соотношения для средней скорости частицы в адиабатическом (низкочастотном) и высокотемпературном режимах движения позволили проанализировать частотные зависимости при различных значениях параметра временной асимметрии флуктуаций  $\varepsilon$  и отношения амплитуд  $a$  изменения потенциальных энергий в двух состояниях дихотомного процесса. Инвариантность характеристик адиабатического броуновского мотора относительно параметра асимметрии позволила предположить эффект одностороннего уширения частотной зависимости скорости при изменении  $\varepsilon$  и  $a$ .

Для подтверждения этого предположения рассмотрено высокотемпературное поведение броуновского мотора с бигармонической потенциальной энергией (описываемой суммой двух синусоид). Получены графические зависимости средней скорости от частоты флуктуаций, совпадающие в области адиабатического режима функционирования. С помощью численной процедуры рассчитаны частоты максимумов и ширины распределений в зависимости от параметра временной асимметрии флуктуаций  $\varepsilon$  и отношения  $a$ . Полученные расчетные зависимости подтвердили предположение об одностороннем уширении колоколообразной частотной зависимости средней скорости броуновского мотора.

**Ключевые слова:** стохастические флуктуационные процессы, диффузионный транспорт, броуновские моторы, уширение колоколообразных распределений

### ВВЕДЕНИЕ

Изучение зависимостей ширины спектральных линий от различных факторов стало важным источником информации как о фундаментальных процессах в различных средах, так и о свойствах конкретных веществ. Например, причины уширения спектральных линий выяснены достаточно полно в газах [1], тогда как в конденсированной фазе за уширение может быть ответственно гораздо большее число факторов [2]. Среди различных видов уширения особый интерес привлекает одностороннее уширение, которое обычно свидетельствует о нетривиальных взаимодействиях рассматриваемых объектов. Так, одностороннее температурное уширение спектральных линий комплексов с

водородной связью, наблюдаемое в различных системах [3–5], удалось объяснить дефазировочным механизмом, учитывающим при слабом обмене энергией с термостатом ангармоническую связь четвертой степени высокочастотного колебания атома водорода с вырожденными низкочастотными либрационными колебаниями комплекса [6, 7].

Учитывая прогресс в описании ширины спектральных линий, совершенно естественно интересоваться механизмами уширения колоколообразных распределений, которые возникают при описании процессов другой природы. Такие распределения возникают, например, в частотных зависимостях средней скорости направленного движения броуновской частицы от частоты флуктуаций ее

пространственно-периодической потенциальной энергии, инициирующей это движение (броуновский мотор, называемый также рэтчетом) [8–11]: колоколообразная форма частотного распределения является характерной для скоростей броуновских рэтчетов класса пульсирующих [8]. Коллективом авторов накоплен обширный опыт теоретического описания такого диффузионного транспорта, исследование которого является перспективным в изучении и конструировании различных наномеханизмов, а также для понимания процессов в молекулярных моторах биологического происхождения [12–14]. К небиологическим системам, демонстрирующим рэтчет-эффект, можно отнести, например, частицы, движущиеся в растворах под действием периодического асимметричного потенциала [15, 16], вихри в сверхпроводниках [17], атомы в диссипативных оптических решетках [18] и электроны в органических полупроводниках [19]. Для области нанотехнологии поверхности интересен предложенный в работе [20] механизм функционирования приповерхностного броуновского мотора, приводимого в действие наклонной к плоскости поверхности флуктуирующей силой с нулевым средним значением. К биологическим рэтчет-системам можно отнести моторные белки: протонную АТФ-синтазу [21], кинезин, миозин [22] и биологическую микротрубочку [23]. Колоколообразный характер частотных зависимостей средних скоростей обусловлен тем, что моторный эффект исчезает как в низкочастотном, так и в высокочастотном пределах [8, 14, 24] из-за, соответственно, отсутствия и равновесности флуктуаций рэтчет-потенциала. Положение максимума зависимости определяется характерным временем диффузии  $\tau_D = L^2/D$  на пространственном периоде  $L$  ( $D$  – коэффициент диффузии). Среди работ, обсуждающих в разных контекстах частотные зависимости средней скорости броуновского рэтчета, авторам неизвестны работы, ставящие целью объяснение механизмов одностороннего уширения, выделение и систематизацию факторов, определяющих эффективную частотную область выраженности рэтчет-эффекта (в

которую следует настраивать управляющий сигнал). В данной статье представлены некоторые результаты в этом направлении. Рассматриваются дихотомные флуктуации потенциальной энергии наночастицы, характеризуемые частотой  $(\tau_+ + \tau_-)^{-1}$  и параметром временной асимметрии  $\varepsilon = (\tau_+ - \tau_-)/(\tau_+ + \tau_-)$ , определяемыми средними временами жизни дихотомных состояний  $\tau_+$  и  $\tau_-$ . При таких флуктуациях скорость частицы оказывается независимой от параметра временной асимметрии в линейном по частоте приближении (низкочастотном или адиабатическом приближении), а потому есть основания ожидать, что частотное распределение средней скорости будет претерпевать одностороннее уширение при изменении этого параметра. Непосредственными расчетами будет показано, что данное предположение действительно справедливо.

#### СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ РЭТЧЕТА В НИЗКОЧАСТОТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Функции распределения  $\rho_{\pm}(x, t)$  координаты броуновской частицы, пребывающей в двух состояниях дихотомного процесса, характеризуемых пространственно периодическими с периодом  $L$  потенциальными рельефами  $U_+(x)$  и  $U_-(x)$ , удовлетворяют уравнениям Смолуховского с дополнительными слагаемыми, описывающими переходы частицы между этими состояниями [14, 25, 26]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\pm}(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} J_{\pm}(x, t) \mp [\gamma_+ \rho_+(x, t) - \gamma_- \rho_-(x, t)], \\ J_{\pm}(x, t) &= -De^{-\beta U_{\pm}(x)} \frac{\partial}{\partial x} [e^{\beta U_{\pm}(x)} \rho_{\pm}(x, t)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  – частоты переходов из состояния «+» в «-» и обратно, связанные со средними временами жизни состояний равенствами  $\gamma_{\pm} = \tau_{\pm}^{-1}$ , коэффициент диффузии  $D = (\zeta\beta)^{-1}$  ( $\zeta$  – коэффициент трения,  $\beta$  – обратная температура) для простоты предполагается одинаковым в двух состояниях дихотомного процесса, а функции распределения  $\rho_{\pm}(x, t)$  удовлетворяют

условию нормировки  $\int_0^L [\rho_+(x,t) + \rho_-(x,t)] dx = 1$ .

Для стационарных процессов ( $\partial \rho_{\pm}(x,t) / \partial t = 0$ ) средняя скорость направленного движения частицы (рэтчета) определяется суммой потоков  $J_{\pm}(x)$ :

$$v = L [J_+(x) + J_-(x)], \quad (2)$$

и, в силу уравнения (1), не зависит от  $x$ . В работе [27] было показано, что переходом к нормированным на единицу функциям распределения  $p_{\pm}(x) = [(\gamma_+ + \gamma_-) / \gamma_{\mp}] \rho_{\pm}(x)$  исходные дифференциальные уравнения (1) для стационарных потоков и их решения упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} J_{\pm}(x) &= \mp \gamma^* [p_+(x) - p_-(x)], \quad J_{\pm}(x) = \\ &= \gamma^* \left\{ \varphi_{\pm} \mp \int_0^x [p_+(x') - p_-(x')] dx' \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $\gamma^* = \gamma_+ \gamma_- / (\gamma_+ + \gamma_-) = (\tau_+ + \tau_-)^{-1}$  – частота флуктуаций потенциального профиля, равная обратному среднему периоду дихотомного процесса  $\tau = \tau_+ + \tau_-$ . Подставляя в решения  $J_{\pm}(x)$  определение потоков из (1), домножая почленно на  $\exp[\beta U_{\pm}(x)]$  и интегрируя по  $x$ , находим константы  $\varphi_{\pm}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{\pm} &= \pm \int_0^L dx q_{\pm}(x) \int_0^x dx' [p_+(x') - p_-(x')], \\ q_{\pm}(x) &\equiv e^{\beta U_{\pm}(x)} / \int_0^L dx e^{\beta U_{\pm}(x)}, \quad (4) \end{aligned}$$

через которые как раз и выражается искомая средняя скорость броуновского мотора (2)

$$\begin{aligned} v &= \gamma^* L \Phi, \quad \Phi = \varphi_+ + \varphi_- = \\ &= \int_0^L dx [q_+(x) - q_-(x)] \int_0^x dx' [p_+(x') - p_-(x')] \quad (5) \end{aligned}$$

Представление (5) для средней скорости имеет общий характер. Физический смысл этого представления состоит в том, что

величина  $L\Phi$  определяет среднее смещение частицы за один цикл переключения состояний, из «+» в «-» и обратно [28]. Средняя длительность времени выполнения цикла равна  $\tau = 1/\gamma^*$ , так что средняя скорость частицы как раз и есть  $L\Phi/\tau$ . Сама же величина  $\Phi$  (всегда меньшая единицы) равна вероятностной доле частиц, пересекающих произвольное поперечное сечение за один цикл, и зависит от функций распределения  $p_{\pm}(x)$ , удовлетворяющих (согласно (1)) следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [e^{\beta U_{\pm}(x)} p_{\pm}(x)] &= \\ &= D^{-1} \gamma_{\pm} e^{\beta U_{\pm}(x)} \left\{ \pm \int_0^x [p_+(x') - p_-(x')] dx' - \varphi_{\pm} \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Подстановка решения этого уравнения в соотношения (4) и (5) определяет скорость броуновского мотора.

Рассмотрим далее низкочастотное приближение, в котором среднюю скорость достаточно вычислить в первом по частоте приближении. Согласно соотношению (5), скорость уже пропорциональна первой степени частоты флуктуаций  $\gamma^*$ , поэтому функции распределения  $p_{\pm}(x)$  должны вычисляться в нулевом по  $\gamma^*$  приближении, то есть в уравнении (6) следует положить  $\gamma_{\pm} = 0$ , что даст равновесное решение:

$$p_{\pm}(x) = e^{-\beta U_{\pm}(x)} / \int_0^L dx' e^{-\beta U_{\pm}(x')}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в выражение для потока  $\Phi$  из (5) и обозначая результат через  $\Phi^{(1)}$ , получаем хорошо известное выражение для средней скорости в первом порядке теории возмущений [29, 30].

Во втором порядке теории возмущений средняя скорость приобретает зависящий от параметра временной асимметрии вклад [27]:

$$v = \frac{L}{\tau} \Phi, \quad \Phi = \Phi^{(1)} + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \frac{\tau_D}{\tau} \Phi^{(2)}, \quad (8)$$

где безразмерный фактор  $\Phi^{(2)}$  зависит от геометрических параметров (формы) потенциального рельефа и температуры.

Таким образом, в адиабатическом приближении, под которым понимают первый (по  $\tau^{-1}$ ) порядок теории возмущений, средняя скорость определяется суммой средних времен жизни  $\tau_+$  и  $\tau_-$ , но не зависит от каждого из них в отдельности. Это связано с тем обстоятельством, что при достаточно больших длительностях дихотомных состояний  $\tau_{\pm} \gg \tau_D$  в каждом потенциальном профиле  $U_{\pm}(x)$  успевают установиться равновесное распределение Больцмана, так что средняя скорость будет определяться только средним периодом дихотомного процесса  $\tau = \tau_+ + \tau_-$ , оказываясь при этом нечувствительной к значению параметра временной асимметрии управляющего

процесса  $\varepsilon = (\tau_+ - \tau_-) / (\tau_+ + \tau_-)$ . В свою очередь, неадиабатическая поправка (второе слагаемое в правой части уравнения (8)) является дробно-степенной функцией  $\varepsilon$ . То есть, в семействе частотных зависимостей средней скорости мотора по различным значениям параметра асимметрии  $\varepsilon$  низкочастотные участки колоколообразных распределений должны совпадать, а отличия - наблюдаться в области средних и высоких частот. Такое поведение говорит об одностороннем механизме уширения, связанном с инвариантностью средней скорости относительно асимметрии управляющего дихотомного процесса в низкочастотном пределе.

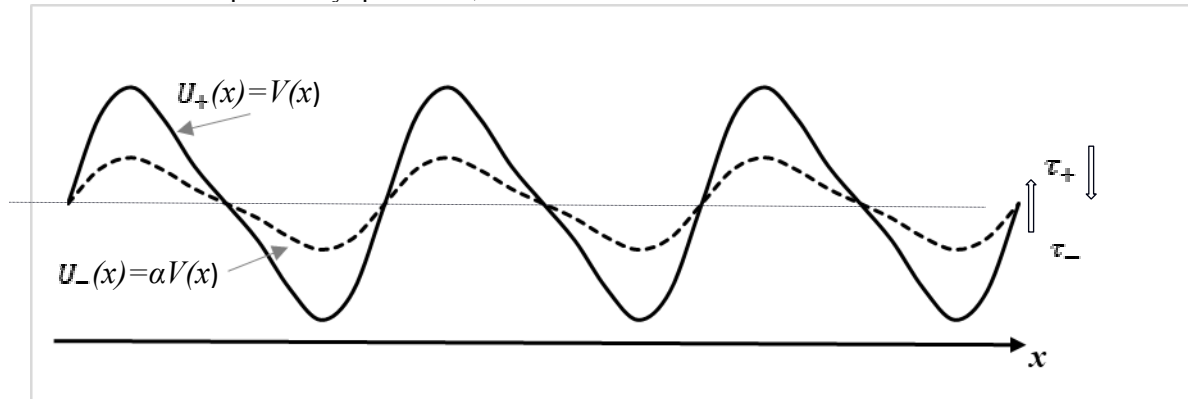


Рис. 1. Схема, иллюстрирующая дихотомные флуктуации амплитуды бигармонической потенциальной энергии, описываемой суммой двух синусоид (9)

### ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

В данном разделе конкретизируем модель броуновского мотора, чтобы подтвердить численными результатами сделанное предположение относительно одностороннего уширения и выделить определяющие параметры, задающие эффективную ширину распределения. Рассмотрим поведение высокотемпературного броуновского мотора с потенциальной энергией, описываемой суммой двух синусоид (рис. 1)

$$U_+(x) = V(x), \quad U_-(x) = \alpha V(x),$$

$$V(x) = V_1 \sin(2\pi x / L) + V_2 \sin(4\pi x / L) \quad (9)$$

и претерпевающей дихотомные флуктуации по амплитуде, характеризуемые безразмерным параметром  $\alpha$ , изменяющимся от нуля до

единицы. В работе [31] было проанализировано высокотемпературное однонаправленное движение броуновской частицы с зависящей от времени потенциальной энергией, описываемой произвольной пространственно-асимметричной периодической функцией. Средняя скорость такого рэтчета при потенциальной энергии вида (9) представляется выражениями:

$$v = \frac{\pi D}{4 L} \beta^3 V_1^2 V_2 f_{\varepsilon, \alpha}(\xi),$$

$$f_{\varepsilon, \alpha}(\xi) = (1 - \alpha)^2 [(1 + \alpha)\Phi_1(\xi, \varepsilon) + (1 - \alpha)\Phi_2(\xi, \varepsilon)],$$

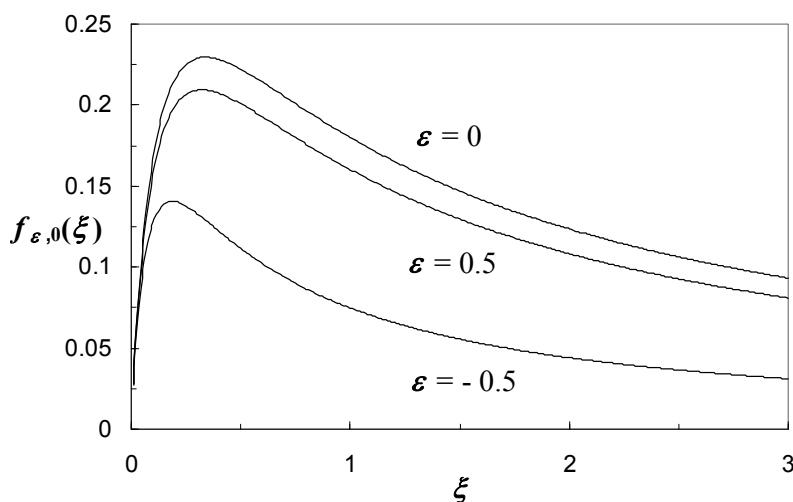
$$\Phi_1(\xi, \varepsilon) = \frac{3\xi(1 + 2z)}{(1 + 4z)^2(1 + z)},$$

$$\Phi_2(\xi, \varepsilon) = \varepsilon \frac{6\xi z}{(1 + 4z)^2(1 + z)},$$

$$\xi \equiv \frac{L^2}{(2\pi)^2 D\tau}, \quad z \equiv \frac{\xi}{1-\varepsilon^2}. \quad (10)$$

На рис. 2 показано семейство частотных зависимостей  $f_{\varepsilon,0}(\xi)$  по параметру асимметрии  $\varepsilon$ , которые, с точностью до константы нормировки, определяют значения средней

скорости броуновского мотора с мерцающим потенциальным профилем (on-off рэтчета), определяемым  $\alpha = 0$ . Как и ожидалось, левые участки распределений совпадают в области малых частот (адиабатичности флуктуаций) и различаются, когда флуктуации становятся неадиабатическими.



**Рис. 2.** Семейство частотных зависимостей  $f_{\varepsilon,0}(\xi)$  по параметру асимметрии  $\varepsilon$ , пропорциональные средней скорости on-off рэтчета ( $\alpha = 0$ )

Для нахождения положений (частот) максимумов  $\xi_m$  распределений  $f_{\varepsilon,0}(\xi)$  и соответствующих ширин  $w$  на половине высот максимумов (графически смысл  $\xi_m$  и  $w$  - см. вставку на рис. 3) были использованы численные методы анализа и решения нелинейных алгебраических уравнений. Результаты вычислений представлены на рис. 3 как зависимости данных величин от параметра асимметрии  $\varepsilon$  при различных значениях параметра  $\alpha$ . Для удобства сравнения результатов обе зависимости  $\xi_m(\varepsilon)$  и  $w(\varepsilon)$  даны на одном поле. Верхнее семейство кривых, т.е.  $w(\varepsilon)$ , соответствует левой оси ординат, нижнее, т.е.  $\xi_m(\varepsilon)$ , - правой оси; значения отношения амплитуд флуктуирующих потенциальных профилей выбрано одинаковым для обоих семейств:  $\alpha = 0, 0.25, 0.5$  и  $0.75$ . Примечательно, что эти два семейства с общей осью абсцисс имеют одинаковый порядок расположения кривых и точку пересечения, соответствующую симметричному дихотомному процессу  $\varepsilon = 0$ .

Кроме того, кривые обоих семейств немонотонны и характеризуются одинаковым положением (значением  $\varepsilon$ ) их максимумов.

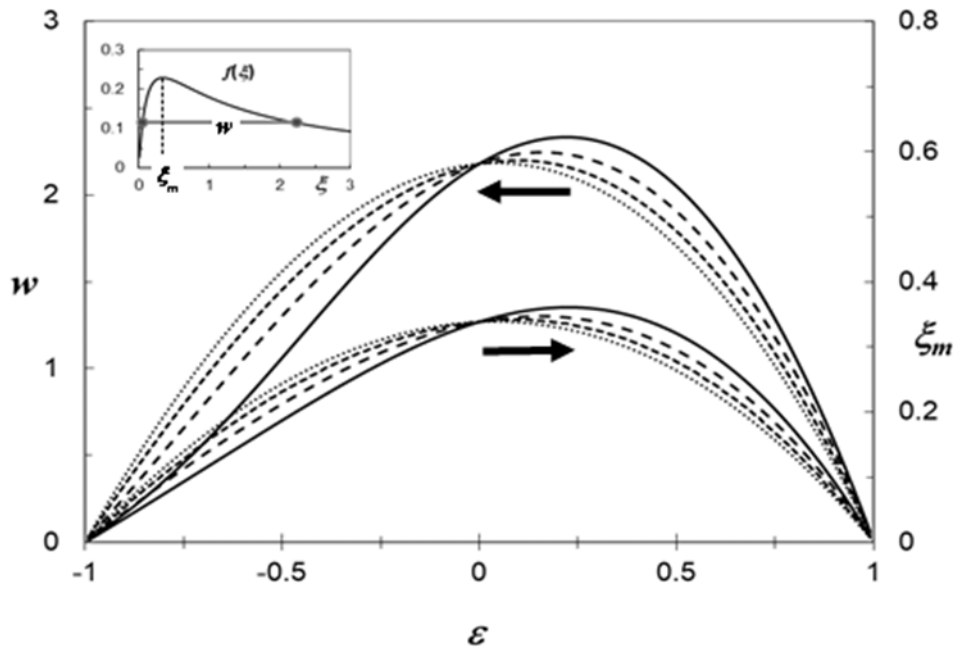
Отношение  $w/\xi_m$ , составленное для разных значений  $\alpha$  и положительных  $\varepsilon$ , с достаточной точностью будет постоянным и приблизительно равным 6.4. Видно, что для данной модели рэтчета имеется оптимальное (соответствующее наиболее широкому эффективному рабочему диапазону частот) значение параметра временной асимметрии. Причем, по мере роста отношения амплитуд  $\alpha$  оно приближается к окрестности нуля, что соответствует симметричным и близким к ним дихотомным флуктуациям потенциальной энергии с равными длительностями дихотомных состояний (внесение асимметрии в соотношение времен жизни состояний приводит к сужению основного рабочего диапазона частот).

#### ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Идея данной статьи опирается на аналогию с изучением ширин спектральных линий в спектроскопии и использует ее в

теории броуновских моторов для анализа поведения ширины колоколообразной частотной зависимости средней скорости наночастицы при изменении геометрических и частотных параметров системы. Колоколообразные зависимости средней скорости в адиабатическом приближении

были получены нами ранее в [27], а в высокотемпературном приближении – в работе [31]; эти представления использовались в данной статье для расчета ширин частотных зависимостей скорости мотора.



**Рис. 3.** Зависимости ширины  $w$  (левая ось) частотных распределений  $f_{\varepsilon,\alpha}(\xi)$  на половине высоты максимума и частоты  $\xi_m$ , соответствующей координатам максимума  $f_{\varepsilon,\alpha}(\xi)$  (правая ось), от параметра асимметрии  $\varepsilon$  при различных значениях параметра  $\alpha = 0, 0.25, 0.5$  и  $0.75$  (кривые семейств сверху-вниз в области  $\varepsilon > 0$ ). На вставке слева сверху изображена функция  $f_{0,0}(\xi)$  и введены обозначения  $\xi_m$  и  $w$

Рассмотрена броуновская частица, движущаяся в поле действия периодического потенциала, который флуктуирует между двумя состояниями с разными средними временами жизни  $\tau_+$  и  $\tau_-$  таким образом, что отношение значений амплитуд потенциального профиля в этих состояниях постоянно и характеризуется определенным значением параметра  $\alpha$ , изменяющегося от 0 до 1. В низкочастотном (адиабатическом) приближении, когда  $\tau_+$  и  $\tau_-$  много больше характерного времени диффузии  $\tau_D = L^2/D$  на пространственном периоде  $L$  потенциальной энергии, стирается различие между стохастическим и детерминистическим дихотомными процессами (так что результаты, полученные из стохастического

описания, могут быть перенесены на детерминистические модели), а средняя скорость рэтчета становится инвариантной относительно параметра асимметрии  $\varepsilon$  и определяется только обратным периодом процесса  $\tau^{-1}$ . Последнее означает отсутствие зависимости средней скорости броуновского мотора от скважности – важной характеристики импульсного процесса, определяемой как  $S = \tau/\tau_+ = 2/(1+\varepsilon)$ . При увеличении частоты флуктуаций, с выходом системы из адиабатического режима, появляется и зависимость от параметра асимметрии или скважности. Поэтому частотные зависимости начинают различаться, и характеристики распределений, такие как их ширина на половине высоты и

положение максимума, становятся функциями  $\varepsilon$  или  $S$ . Сравнивая эти зависимости, низкочастотные участки которых совпадают, а высокочастотные различаются, можно заключить, что уширение носит односторонний характер.

Для подтверждения предсказанного одностороннего характера уширения частотных зависимостей скорости мотора мы использовали модельную систему – высокотемпературный рэтчет с дихотомными флуктуациями бигармонического потенциала по амплитуде. Выражение для его средней скорости можно найти аналитически, что сделало возможным сравнительно простой численный анализ интересующих величин. Сопоставление ширин и положений максимумов частотных распределений средней скорости как функций параметра асимметрии  $\varepsilon$  при различных значениях отношения амплитуд потенциала  $\alpha$  в двух состояниях дихотомного процесса позволило заключить, что эти величины приблизительно пропорциональны друг другу с коэффициентом пропорциональности, примерно равным 6.4 при  $\varepsilon > 0$ . Таким образом, мы показали, что в зависимости от параметра временной асимметрии  $\varepsilon$  частотная зависимость средней скорости действительно уширяется односторонне: она остается практически неизменной в области низких

частот, изменяется в центральной области и претерпевает существенное расширение в области высоких частот. В системах, имеющих варьируемый параметр пространственной асимметрии, следует ожидать влияния конкуренции этого параметра с  $\varepsilon$  на «скорость» уширения и оптимальный диапазон частот.

Полученные результаты важны для широкого класса рэтчетов, функционирующих за счет внешних импульсных процессов различной природы. Примером могут служить фотомоторы, приводимые в движение циклическим процессом включения и выключения резонансного лазерного излучения, характеризуемого определенной скважностью чередуемых импульсов [32]. Оказалось, что в области больших периодов чередования импульсов (низких частот флуктуаций потенциальной энергии) средняя скорость фотомотора практически не зависит от скважности. И наоборот, при малых периодах процесса скважность становится управляющим параметром, могущим существенно изменять эту скорость. Таким образом, установленные в данной статье закономерности дают дополнительные идеи для управления транспортом наночастиц.

Работа частично поддержана грантом БРФФИ (№ Ф18Р-022).

## Одностороннє розширення частотної залежності швидкості броунівського мотора

Н.Г. Шкода, Т.Є. Корочкова, В.М. Розенбаум, К.М. Шевцова, І.В. Шапочкіна

*Інститут хімії поверхні ім. О.О. Чуйка Національної академії наук України  
вул. Генерала Наумова, 17, Київ, 03164, Україна, ngshkoda@gmail.com  
Білоруський державний університет, Фізичний факультет  
пр. Незалежності, 4, Мінськ, 220030, Білорусь*

*Відомо, що ширини спектральних ліній містять важливу інформацію: про властивості матеріалів, характер взаємодії частинок речовини, фізичні параметри середовища і т.д. За аналогією з вивченням залежностей спектральних ліній, в даній статті досліджується поведінка ширини колоколоподібної частотної залежності середньої швидкості броунівських частинок, які описуються моделлю стохастичного броунівського мотора з асиметричними дихотомними флуктуаціями потенціальної енергії. Колоколоподібний характер цієї частотної залежності пояснюється зникненням направленої руху в низько- і високочастотних межах. Використовуючи співвідношення для середньої швидкості частинки в адіабатичному (низькочастотному) і високотемпературному режимах руху, проаналізовано залежності швидкості від частоти флуктуацій при різних значеннях параметра часової асиметрії флуктуацій  $\varepsilon$  і відношеннях амплітуд  $\alpha$  зміни потенціальних енергій в двох станах дихотомного процесу. В силу*

інваріантності характеристик адіабатичного броунівського мотора щодо параметра асиметрії, частотна залежність швидкості повинна зазнавати одностороннє розширення при зміні  $\varepsilon$  і  $\alpha$ .

Для підтвердження цього припущення розглянуто високотемпературну поведінку броунівського мотора з бігармонійною потенціальною енергією (яка описується сумою двох синусоїд). Отримано графічні залежності середньої швидкості від частоти флуктуацій, що співпадають в області адіабатичності. За допомогою чисельної процедури розраховано частоти максимумів і ширини розподілів в залежності від параметра часової асиметрії флуктуацій  $\varepsilon$  і відношення амплітуд  $\alpha$ . Отримані розрахункові залежності підтверджують припущення про одностороннє розширення колоколоподібної частотної залежності броунівського мотора.

**Ключові слова:** стохастичні флуктуаційні процеси, дифузний транспорт, броунівські мотори, розширення колоколоподібних розподілів

## One-sided broadening of frequency dependence of the velocity of a Brownian motor

N.G. Shkoda, T.Ye. Korochkova, V.M. Rozenbaum, K.M. Shautsova, I.V. Shapochkina

Chuiiko Institute of Surface Chemistry of National Academy of Sciences of Ukraine  
17 General Naumov Str., Kyiv, 03164, Ukraine, ngshkoda@gmail.com  
Department of Physics, Belarusian State University  
4 Pr. Nezavisimosti, Minsk, 220030, Republic of Belarus

It is known that widths of spectral lines provide a researcher with a variety of important information: about properties of materials, nature of particles interaction, physical parameters of an environment, etc. By analogy with a study of spectral lines, this article analyzes behavior of the width of a bell-shaped frequency dependence of the average velocity of Brownian particles described by a model of a stochastic Brownian motor with asymmetric dichotomous fluctuations of particle potential energy. The bell-shaped dependence is explained by the disappearance of the motor effect in both the low- and high-frequency limits. The relations for the average particle velocity in the adiabatic (low-frequency) and high-temperature regimes of motion allowed us to analyze the frequency dependences for different values of the temporal asymmetry parameter  $\varepsilon$  of the fluctuations and the ratio  $\alpha$  of potential energy amplitudes in two states of the dichotomous process. The invariance of characteristics of an adiabatic Brownian motor with respect to the asymmetry parameter allowed us to assume the effect of one-sided broadening of the frequency dependence of the velocity with changing  $\varepsilon$  and  $\alpha$ .

To confirm this assumption, the high-temperature behavior of a Brownian motor with a biharmonic potential energy (described by a sum of two sinusoids) is considered. Graphic dependences of the average velocity on the fluctuation frequency are obtained, which coincide in the adiabatic regime of motor functioning. Using the numerical procedure, frequencies of maxima and widths of the distributions have been calculated dependent on the temporal asymmetry parameter of fluctuations  $\varepsilon$  and the ratio  $\alpha$ . The calculated dependences confirmed the assumption about the one-sided broadening of the bell-shaped frequency dependence of the average velocity of a Brownian motor.

**Keywords:** stochastic fluctuation processes, diffusion transport, Brownian motors, broadening of bell-shaped distributions

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вейскопф В. Ширина спектральных линий в газах // Успехи физических наук. – 1933. – Т. 13, № 7. – С. 552–592.
2. Шека Е.Ф. Спектроскопия аморфных веществ с молекулярной структурой // Успехи физических наук. – 1990. – Т. 160, № 2. – С. 263–298.
3. Иогансен А.В. Прямая пропорциональность энергии водородных связей и усиление валентных  $\nu(\text{XH})$  колебаний в инфракрасных спектрах // Оптика и спектроскопия. – 1987. – Т. 63. – Р. 1186–1190.



4. *Йогансен А.В., Розенберг А.В.* Инфракрасные полосы ОН (OD) группы, водородная связь и особенность строения кристаллов трет-бутанола: 15–350 К // Журнал структурной химии. – 1989. – Т. 30, № 1. – С. 92–99.
5. *Йогансен А.В.* Природа уширения полос в ИК-спектрах водородных связей // Извест. Академ. наук СССР, Сер. Физика. – 1989. – Т. 53, № 9. – С. 1741–1745.
6. *Розенбаум В.М., Огенько В.М., Чуйко А.А.* Колебательные и ориентационные состояния поверхностных групп атомов // Успехи физических наук. – 1991. – Т. 161, № 10. – С. 79–119.
7. *Кузьменко И.В., Клименко В.Е., Розенбаум В.М.* Форма полосы локальных колебаний при адсорбции молекулярных комплексов с водородной связью // Оптика и спектроскопия. – 2000. – Т. 88, № 2. – С. 237–240.
8. *Reimann P.* Brownian motors: noisy transport far from equilibrium // Phys. Rep. – 2002. – V. 361, N 2–4. – P. 57–265.
9. *Hänggi P., Marchesoni F.* Artificial Brownian motors: Controlling transport on the nanoscale // Rev. Mod. Phys. – 2009. – V. 81, N 1. – P. 387–442.
10. *Schadschneider A., Chowdhury D., Nishinari K.* Stochastic Transport in Complex Systems: From Molecules to Vehicles. – Amsterdam: Elsevier Science B., 2010.
11. *Cubero D., Renzoni F.* Brownian Ratchets: From Statistical Physics to Bio and Nano-motors. – Cambridge University Press, 2016.
12. *Корочкова Т.Е., Шкода Н.Г., Чернова А.А., Розенбаум В.М.* Точные аналитические решения в теории броуновских моторов и насосов // Поверхность. – 2012. – Вып. 4(19). – С. 19–35.
13. *Корочкова Т.Е., Шкода Н.Г., Розенбаум В.М. и др.* Общее решение кинетического уравнения Паули и его приложения к диффузионному транспорту // Поверхность. – 2018. – Вып. 10(25). – С. 3–18.
14. *Розенбаум В.М., Шапочкина И.В., Трахтенберг Л.И.* Метод функций Грина в теории броуновских моторов // Успехи физических наук. – 2019. – Т. 189, № 5. – С. 529–543.
15. *Rousselet J., Salome L., Ajdari A.* Directional motion of brownian particles induced by a periodic asymmetric potential // J. Nature. – 1994. – V. 370. – P. 446–448.
16. *Gorre-Talini L., Spatz J. P., Silberzan P.* Dielectroscopic ratchets // Chaos. – 1998. – V. 8. – P. 650–656.
17. *de Souza Silva C.C., de Vondel J.V., Morelle M., Moshchalkov V.V.* Controlled multiple reversals of a ratchet effect // Nature. – 2006. – V. 440. – P. 51–654.
18. *Gommers R., Bergamini S., Renzoni F.* Dissipation-induced symmetry breaking in a driven optical lattice // Phys. Rev. Lett. – 2005. – V. 95. – P. 073003.
19. *Kedem O., Lau B., Weiss E.A.* Mechanisms of symmetry breaking in a multidimensional flashing particle ratchet // ACS Nano Lett. – 2017. – V. 11, N 7. – P. 7148–7155.
20. *Rozenbaum V.M., Chernova A.A.* Near-surface Brownian motor with synchronously fluctuating symmetric potential and applied force // Surf. Sci. – 2009. – V. 603, N 22. – P. 3297–3300.
21. *Романовский Ю.Л., Тихонов А.Н.* Молекулярные преобразователи энергии живой клетки. Протонная АТФ-синтаза – вращающийся молекулярный мотор // Успехи физических наук. – 2010. – Т. 180, № 9. – С. 931–956.
22. *Романовский Ю.Л., Трифоненков В.П.* Энергетика и стохастическая динамика внутринейронного транспорта // Успехи физических наук. – 2016. – Т. 186, № 2. – С. 125–145.
23. *Захаров П.Н., Аржаник В.К., Ульянов Е.В. и др.* Микротрубочка – динамически нестабильный биополимер со спонтанными переключениями между фазовыми состояниями // Успехи физических наук. – 2016. – Т. 186, № 8. – С. 853–868.
24. *Astumian R.D., Bier M.* Fluctuation driven ratches: Molecular motors // Phys. Rev. Lett. – 1994. – V. 72, N 11. – P. 1766–1769.
25. *Van der Broeck C., Hänggi P.* Activation rates for nonlinear stochastic flows driven by non-Gaussian noise // Phys. Rev. A. – 1984. – V. 30, N 5. – P. 2730–2736.
26. *Risken H.* The Fokker-Plank Equation. Methods of Solution and Applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 490 p.
27. *Rozenbaum V.M., Korochkova T.Ye., Chernova A.A., Dekhtyar M.L.* Brownian motor with competing spatial and temporal asymmetry of potential energy // Phys. Rev. E. – 2011. – V. 83. – P. 051120.
28. *Розенбаум В.М.* Броуновское движение и поверхностная диффузия. Броуновские моторы // Физика и химия поверхности. Книга 1. Физика поверхности (в двух томах) / Под ред. Картеля Н.Т. и Лобанова В.В. – Киев: Институт химии поверхности им. А.А. Чуйко НАН Украины, ООО «Интерсервис». – 2015. – Т. 2, ч. VI, глава 23, 24. – С. 806–841.
29. *Parrondo J.M.R.* Reversible ratchets as Brownian particles in an adiabatically changing periodic potential // Phys. Rev. E. – 1998. – V. 57, N 6. – P. 7297–7300.

30. Parrondo J.M.R., Blanco J.M., Cao F.J., Brito R. Efficiency of Brownian motors // *Europhys. Lett.* – 1998. – V. 43, N 3. – P. 248–254.
31. Розенбаум В.М. Высокотемпературные броуновские моторы: детерминистические и стохастические флуктуации периодического потенциала // *Письма в ЖЭТФ.* – 2008. – Т. 88, № 5. – С. 391–395.
32. Rozenbaum V.M., Dekhtyar M.L., Lin S.H., Trakhtenberg L.I. Photoinduced diffusion molecular transport // *J. Chem. Phys.* – 2016. – V. 145, N 6. – P. 064110-1-12.

#### REFERENCES

1. Veyskopf V. Width of spectral lines in gases. *Physics-Uspekhi.* 1933. **13**(4): 552. [in Russian].
2. Sheka E.F. Spectroscopy of amorphous substances with molecular structure. *Physics-Uspekhi.* 1990. **33**(2): 147. [In Russian].
3. Iogansen A.V. Direct proportionality of the hydrogen bonding energy and the intensification of the stretching  $\nu(\text{XH})$  vibration in infrared spectra. *Optics and Spectroscopy.* 1987. **63**: 1186 [In Russian].
4. Iogansen A.V., Rozenberg M.Sh. Infrared bands of the OH (OD) group, hydrogen bonding, and special features of the structure of crystals of tert-butanol at 15–350 K. *J. Struct. Chem.* 1989. **30**(1): 92. [in Russian].
5. Iogansen A.V. The nature of band broadening in the IR spectra of hydrogen bonds. *Bull. Acad. Sci. USSR, Phys. Ser.* 1989. **53**(9): 1741. [in Russian].
6. Rozenbaum V.M., Ogenko V.M., Chuiko A.A. Oscillatory and orientational states of surface groups of atoms. *Physics-Uspekhi.* 1991. **34**(10): 883. [in Russian].
7. Kuz'menko I.V., Klimenko V.E., Rozenbaum V.M. Shape of the local-vibration band of adsorbed hydrogen-bonded molecular complexes. *Optics and Spectroscopy.* 2000. **88**(2): 201. [in Russian].
8. Reimann P. Brownian Brownian motors: noisy transport far from equilibrium. *Phys. Rep.* 2002. **361**(2–4): 57.
9. Hänggi P., Marchesoni F. Artificial Brownian motors: Controlling transport on the nanoscale. *Rev. Mod. Phys.* 2009. **81**(1): 387.
10. Schadschneider A., Chowdhury D., Nishinari K. *Stochastic Transport in Complex Systems: From Molecules to Vehicles.* 1st Edition. (Amsterdam: Elsevier Science, 2010).
11. Cubero D., Renzoni F. *Brownian Ratchets: From Statistical Physics to Bio and Nano-motors.* (Cambridge University Press., 2016).
12. Korochkova T.Ye., Shkoda N.G., Chernova A.A., Rozenbaum V.M. Exact analytical solutions in the theory of brownian motors and pumps. *Surface.* 2012. **4**(19): 19. [in Russian].
13. Korochkova T.Ye., Shkoda N.G., Rozenbaum V.M., Kamysh Yu.A., Shapochkina I.V., Ikim M.I., Gerasimov G.N., Gromov V.F. General solution of Pauli master equation and applications to diffusive transport. *Surface.* 2018. **10**(25): 3. [in Russian].
14. Rozenbaum V.M., Shapochkina I.V., Trakhtenberg L.I. The method of green's functions in the theory of Brownian motors. *Physics-Uspekhi.* 2019. **189**(5): 529. [in Russian].
15. Rousselet J., Salome L., Ajdari A. Directional motion of brownian particles induced by a periodic asymmetric potential. *J. Nature.* 1994. **370**: 446.
16. Gorre-Talini L., Spatz J.P., Silberzan P. Dielectroscopic ratchets. *Chaos.* 1998. **8**: 650.
17. de Souza Silva C.C., de Vondel J.V., Morelle M., Moshchalkov V.V. Controlled multiple reversals of a ratchet effect. *Nature.* 2006. **440**: 651.
18. Gommers R., Bergamini S., Renzoni F. Dissipation-induced symmetry breaking in a driven optical lattice. *Phys. Rev. Lett.* 2005. **95**: 073003.
19. Kedem O., Lau B., Weiss E.A. Mechanisms of symmetry breaking in a multidimensional flashing particle ratchet. *ACS Nano Lett.* 2017. **11**(7): 7148.
20. Rozenbaum V.M., Chernova A.A. Near-surface Brownian motor with synchronously fluctuating symmetric potential and applied force. *Surf. Sci.* 2009. **603**(22): 3297. [in Russian].
21. Romanovskiy Yu.L., Tikhonov A.N. Molecular energy transducers of the living cell. Proton ATP synthase: a rotating molecular motor. *Physics-Uspekhi.* 2010. **53**(7): 893. [in Russian].
22. Romanovskiy Yu.L., Trifonenkov V.P. Energetics and stochastic dynamics of intraneuron transport. *Physics-Uspekhi.* 2016. **59**(2): 121. [in Russian].
23. Zakharov P.N., Arzhanik V.K., Ul'yanov Ye.V., Gudimchuk N.B., Ataulkhanov F.I. Microtubule: a dynamically unstable stochastic phase switching polymer. *Physics-Uspekhi.* 2016. **59**(8): 773. [in Russian].
24. Astumian R.D., Bier M. Fluctuation driven ratches: Molecular motors. *Phys. Rev. Lett.* 1994. **72**(11): 1766.

25. Van der Broeck C., Hänggi P. Activation rates for nonlinear stochastic flows driven by non-Gaussian noise. *Phys. Rev. A*. 1984. **30**(5): 2730.
26. Riskin H. *The Fokker-Plank Equation. Methods of Solution and Applications*. (Berlin: Springer-Verlag, 1989).
27. Rozenbaum V.M., Korochkova T.Ye., Chernova A.A., Dekhtyar M.L. Brownian motor with competing spatial and temporal asymmetry of potential energy. *Phys. Rev. E*. 2011. **83**: 051120.
28. Rozenbaum V.M. Brownian motion and surface diffusion. In: *Physics and chemistry of the surface*. Book 1. *Physics of the surface*. (Part VI, Chapter 23). (Kyiv: Chuiko Institute of Surface Chemistry of National Academy of Sciences of Ukraine, Interservis, 2015). P. 806. [in Russian].
29. Parrondo J.M.R. Reversible ratchets as Brownian particles in an adiabatically changing periodic potential. *Phys. Rev. E*. 1998. **57**(6): 7297.
30. Parrondo J.M.R., Blanco J.M., Cao F.J., Brito R. Efficiency of Brownian motors. *Europhys. Lett.* 1998. **43**(3): 248.
31. Rozenbaum V.M. High-temperature Brownian motors: deterministic and stochastic fluctuations of a periodic potential. *JETP Lett.* 2008. **88**(5): 342. [in Russian].
32. Rozenbaum V.M., Dekhtyar M.L., Lin S.H., Trakhtenberg L.I. Photoinduced diffusion molecular transport. *J. Chem. Phys.* 2016. **145**(6): 064110.

Получена 25.04.2019, принята 20.08.2019