

В.М. Розенбаум

## КОНСТРУКТИВНАЯ РОЛЬ ХАОСА: БРОУНОВСКИЕ МОТОРЫ И ВЫИГРЫШНЫЕ СТРАТЕГИИ В ТЕОРИИ ИГР

*Институт химии поверхности им. А.А. Чуйко Национальной академии наук Украины  
ул. Генерала Наумова, 17, Киев, 03164, Украина, E-mail: vik-roz@mail.ru*

*Несмотря на широко распространенное представление о негативной роли хаоса в природе и жизни человека, существуют примеры его конструктивной роли в различных процессах. Среди них особое место занимают процессы, в которых тепловой шум вызывает не только броуновское движение, но и дрейф наночастиц в результате несмещенных (unbiased) неравновесных возмущений различной природы при нарушении пространственной и/или временной симметрии системы. С такими процессами связано действие броуновских моторов, или рэтчетов, активно изучаемых в последние десятилетия. В данной статье принципы функционирования подобных систем разъясняются на основе авторского подхода, который объединяет рассмотрение различных проявлений рэтчет-эффекта в моделях флуктуирующего потенциала, каталитического колеса и электроконформационного сопряжения. Еще одним проявлением этого эффекта являются предложенные Паррондо парадоксальные игры, в которых хаос проявляется в случайных бросках игральной кости, а рэтчет-эффект состоит в определенной смене стратегий игры, обеспечивающей средний выигрыш. В данной статье предложен простейший вариант игры такого рода; он состоит в чередовании двух антисимметричных игр, в которых правила зависят от четности значения капитала, имеющегося у игрока перед очередным броском. Зависимость среднего выигрыша от количества бросков игральной кости рассчитана путем компьютерного моделирования и сопоставлена с результатом антисимметричной модели «каталитического колеса», справедливой в адиабатическом приближении. Теоретический выигрыш, рассчитанный с помощью этой модели, хорошо согласуется с результатом численного моделирования предложенной игры. Привлекательность интерпретации рэтчет-эффекта в терминах теории игр состоит в возможности наглядно представить теоретический аппарат и исследовать закономерности функционирования броуновских моторов простыми модельными методами.*

**Ключевые слова:** броуновские моторы, рэтчет-эффект, теория игр, конструктивная роль хаоса

### ВВЕДЕНИЕ

В греческой мифологии слово chaos означало первобытное состояние мира, из которого образовался космос – мир, мыслимый как упорядоченное единство. Оппозиция хаос-космос аналогична диадам тьма-свет, натура-культура и т.п. В современном представлении хаос – беспорядочное, бесформенное, неопределённое состояние вещей, так что антитезой хаосу обычно является порядок, причём хаос – это бесструктурность, неустойчивость, стихийность, а порядок – это структурность, устойчивость, организованность. Отчётливо напрашивается вывод, что хаос – это плохо, а порядок – хорошо [1]. Однако, как сказал Антуан де Сент-Экзюпери: «Жизнь создаёт порядок. Порядок же бессилён создать жизнь» ([2], с.15). А Поль Валери ещё в 1919 году предупреждал: «Две опасности не перестанут угрожать миру: порядок и

беспорядок» ([3], с. 88). Абсолютный порядок и абсолютный хаос одинаково грозят гибелью, так что по крайней мере жизнь, при всем ее стремлении к упорядочению, нуждается в какой-то доле хаоса. В полной мере диалектически двойственную роль хаоса (положительную и отрицательную, и не только в отношении живой природы) раскрывает синергетика – междисциплинарное направление науки, объясняющее образование и самоорганизацию моделей и структур в открытых системах, далеких от термодинамического равновесия [4, 5]. Синергетическое описание охватывает любые такие системы, в том числе физические, биологические, экологические, социальные и т.д., позволяет взглянуть с единой точки зрения на проблемы математики и экономики, физики и психологии, компьютерных наук и географии, техники и философии.

Развитию любого процесса (явления) соответствует определенная траектория, т.е. линия изменения параметров системы на ее пути к аттрактору – идеальному устойчивому конечному состоянию, которое притягивает к себе всевозможные траектории системы и задает ее эволюцию в определенном направлении [6, 7]. В точках бифуркаций, или шире – полифуркаций, траектория разветвляется. В законе движения нет указания на то, по какой ветви следовать, есть лишь спектр возможностей. Выбор ветви зависит от хаотических флуктуаций, от факторов локального масштаба. Через малые хаотические блуждания система попадает в область нового аттрактора. Таким образом, хаос обеспечивает возможность схода с прежней траектории и смену режима развития системы. Так проявляется один из аспектов конструктивной роли хаоса – генерация новых возможностей, которые затем сортируются с помощью различных упорядочивающих механизмов.

Вышеописанные синергетические закономерности наглядно воплощаются в совершенно разнородных, на первый взгляд, процессах и системах. Компоненты этих систем, пребывающие (последовательно или параллельно) в состояниях хаоса или порядка, могут быть представлены атомами, молекулами, клетками, живыми организмами, экономическими субъектами, идеями и т.д. Например, эволюция видов совершается как процесс, проходящий через стадию накопления хаотических мутаций в геноме живых существ и стадию дискриминации этих мутаций с помощью великого сортировщика – естественного отбора [4]. Подобным образом можно рассматривать и свободный рынок как беспорядочные действия субъектов, определяемые исключительно их личными целями. Эти случайные флуктуации на этапе становления экономики и ее монетарного сектора сортируются по эффективности, что приводит не только к затуханию неэффективных линий (банкротству отдельных участников рынка), но и к революционным переворотам и формированию в перспективе качественно нового экономического порядка [8].

Наконец, ряд «цветных революций», прокатившихся по миру за последние

двадцать лет, доказывает практическую действенность «теории управляемого хаоса», лежащую в основе сценария всех этих «ненасильственных» государственных переворотов [9]. Государство, заинтересованное в смене правящего режима другой страны, сначала ввергает эту страну в хаос с помощью различных политтехнологий (подогрев недоверия к правительству, поощрение протестов и недовольства населения, финансовая поддержка оппозиции, вытеснение традиционных моральных и культурных ценностей), а затем тщательно просеивает (дискриминирует) возникающие флуктуации общественного состояния через сито своих национальных интересов. Хаосу не дают утихнуть до тех пор, пока не возникнут предпосылки к установлению компрадорского режима, выгодного для государства-манипулятора.

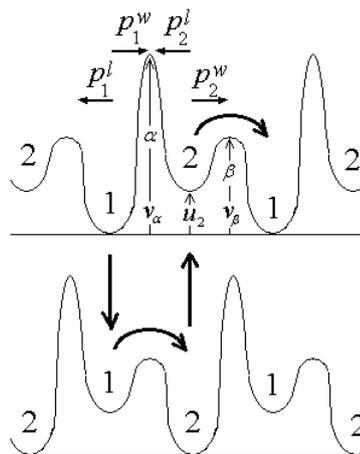
Одним из научных направлений, в которых хаос играет конструктивную роль, является управляемый диффузионный транспорт и связанные с ним области исследований, которые обобщают под названием «броуновские моторы» или «рэтчеты». Определение рэтчета несколько различается у разных авторов (см., например, [10–14]). Одно из наиболее строгих определений, суммирующее литературные данные, может быть дано следующим образом. Броуновский мотор (рэтчет) – это находящаяся в контакте с термостатом наносистема, в которой направленное движение возникает в результате несмещенных (unbiased) неравновесных возмущений различной природы при нарушении пространственной и/или временной симметрии. В данной статье принципы функционирования подобных систем разъясняются на основе авторского подхода [15], объединившего различные, на первый взгляд, проявления рэтчет-эффекта: «каталитическое колесо» [16], электроконформационное сопряжение (electro-conformational coupling [17]) и модель флуктуирующего потенциала (flashing-potential model [18]). Кроме того, в данной статье этот авторский подход обобщен также и на известные парадоксальные игры Паррондо [19–25], обеспечивающие выигрыш при определенной последовательности проигрышных стратегий.

## РЭТЧЕТ-ЭФФЕКТ

Глубокое понимание процессов и явлений обычно начинается с того, что в них выделяют некий простейший элементарный процесс (кирпичик знания), который понятен интуитивно (как говорят, может быть объяснен «на пальцах») и легко описывается количественно с помощью простой модели. В качестве элементарного процесса, объясняющего возникновение рэтчет-эффекта, рассмотрим одномерное движение ансамбля невзаимодействующих наночастиц, находящихся в периодическом потенциальном профиле. Потенциальный профиль состоит из набора ям и разделяющих их барьеров. Вследствие взаимодействия наночастиц с тепловым резервуаром, т.е. хаотических толчков со стороны молекул резервуара, наночастицы способны преодолевать потенциальные барьеры и переходить в более глубокие потенциальные ямы. Конструктивная роль хаоса здесь состоит в том, что наночастицы пребывают в метастабильных состояниях (неглубоких потенциальных ямах) ограниченное время, так что в конечном итоге через определенное время, называемое временем релаксации, в системе устанавливается термодинамическое равновесие. Равновесное распределение частиц в потенциальном профиле  $V(x)$  подчиняется распределению Больцмана, при котором функция распределения пропорциональна  $\exp[-V(x)/k_B T]$  ( $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура). Согласно этому распределению, вероятность найти частицу в более глубокой яме оказывается больше, чем в менее глубокой. В состоянии термодинамического равновесия не происходит перераспределения частиц, и потоки частиц в различных участках системы (среднее число частиц, пересекающих любое поперечное сечение в единицу времени) равны нулю.

Рассмотрим ситуацию, в которой начальное распределение частиц отличается от равновесного распределения в данном потенциальном профиле  $V(x)$ . Это может случиться, если принудительно поместить частицу в определенное место или если начальное распределение соответствует равновесию в другом потенциальном профиле. Потребуем, чтобы потенциальный

профиль  $V(x)$  был асимметричным. Тогда можно ожидать, что средний перенос частиц из начального распределения в конечное, равновесное в  $V(x)$ , также будет асимметричным, то есть возникнет ненулевой поток частиц через определенное поперечное сечение. Такие потоки будут возникать всякий раз при переключении двух потенциальных профилей. В результате имеем направленное движение частиц, скорость которых будет пропорциональна частоте переключений потенциальных профилей, если последняя мала по сравнению с обратным временем установления равновесия (временем релаксации) в каждом потенциальном профиле. Рисунок 1 иллюстрирует такой механизм возникновения направленного потока частиц на примере двухъямного пространственно-периодического потенциала, который периодически (во времени) сдвигается на полпериода.



**Рис. 1.** Схема, иллюстрирующая механизм возникновения направленного движения частицы при переключении двух асимметричных потенциальных профилей. Через  $p_1^w$ ,  $p_1^l$  и  $p_2^w$ ,  $p_2^l$  обозначены вероятности переходов частицы из ямы 1 и 2, соответственно

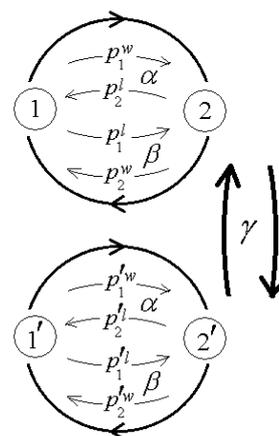
Частица в потенциальном профиле, изображенном в верхней части рис. 1, с большой вероятностью пребывает в глубокой яме 1. Пусть в силу каких-либо внешних процессов (например, конформационных переходов в частице, изменяющих ее взаимодействие с окружающей средой) потенциальный профиль изменяется так, что глубокие ямы становятся мелкими, а мелкие –

глубокими (проще всего этого можно добиться сдвигом исходного потенциального профиля на полпериода – см. нижнюю часть рисунка). Тогда частица, находившаяся в глубокой яме верхнего профиля, оказывается в мелкой яме нижнего профиля, и начинается процесс релаксации к равновесному состоянию в нижнем профиле. Кинетика этого процесса зависит от величин потенциальных барьеров, окружающих частицу. Если правый барьер ниже левого (как изображено на рисунке), то частица в процессе установления равновесия (которое для нижнего профиля соответствует заполнению глубоких ям 2) с большей вероятностью переместится направо. Легко видеть, что последующая смена потенциальных профилей (с нижнего на верхний) снова приведет к тому, что частица, оказавшись в менее глубокой яме, перейдет в более глубокую яму направо. Таким образом, при циклическом переключении потенциальных профилей возникнет направленное движение частицы направо со средней скоростью, пропорциональной частоте переключений, при условии, что эта частота меньше обратного времени релаксации системы к равновесным состояниям (адиабатическое приближение). При больших частотах скорость достигает максимального значения, а затем убывает до нуля при частотах, стремящихся к бесконечности.

Основной задачей в теории броуновских моторов является вычисление средней скорости движения, возникающего благодаря рэтчет-эффекту. Теория этого эффекта развивалась во множестве работ, использовавших модели различного уровня сложности и детализации, а также точные и приближенные методы описания [14]. Остановимся на простейшем описании, в котором механизм возникновения направленного движения, представленный на рис. 1, реализуется во вращении так называемого каталитического колеса (рис. 2) [15].

Сопоставление рис. 1 и 2 показывает, что направленное поступательное движение частиц, возникающее при флуктуациях параметров двухъямного периодического потенциала, может быть сопоставлено с однонаправленным вращением каталитического колеса, в котором система флуктуирует, переходя между двумя

состояниями посредством двух каналов реакций. При этом вероятности переходов  $p_1^w$ ,  $p_1^l$ ,  $p_2^w$ ,  $p_2^l$  между состояниями полагаются такими же, как и между потенциальными ямами, а реакционные каналы  $\alpha$  и  $\beta$  эквивалентны потенциальным барьерам  $\alpha$  и  $\beta$ . Таким образом, рэтчет-эффект возникает вследствие флуктуаций параметров «каталитического колеса», точно так же, как он возникает при флуктуациях параметров потенциального рельефа на рис. 1.



**Рис. 2.** Модель «каталитического колеса», однонаправленное вращение которого обусловлено переходами между состояниями 1 и 2 через два реакционных канала  $\alpha$  и  $\beta$ , а также переключениями между состояниями 1, 2 и штрихованными состояниями 1', 2' с частотой  $\gamma$ . Вероятности переходов из состояний 1 и 2 по часовой стрелке обозначены через  $p_1^w$  и  $p_2^w$ , а против часовой стрелки – через  $p_1^l$  и  $p_2^l$ . Вероятности переходов между штрихованными состояниями обозначены штрихованными величинами

Модель «каталитического колеса» является основой описания каталитического цикла биохимических энзимов, которые отвечают за функционирование молекулярных насосов, открытых Скоу в 1957 г. [26, 27]. Эти энзимы представляют собой комплексы белковых молекул в мембране клетки, состоящие из четырёх белковых компонент: двух  $\alpha$ - и двух  $\beta$ -единиц (не путать с  $\alpha$  и  $\beta$  каналами на рис. 2). В  $\alpha$ -единицах происходит гидролиз АТФ (аденозинтрифосфата) и перемещение ионов,  $\beta$ -единицы осуществляют регуляторные функции. Гидролиз АТФ приводит к

насыщению Na, K-АТФазы фосфором, а при последующей ее дефосфоризации возникает транспорт ионов  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$  [28, 29]. Описание каталитического механизма является довольно сложным, однако его основные черты могут быть поняты из упрощенных моделей, одной из которых и выступает модель «каталитического колеса».

Во время каталитического цикла энзим может находиться в одном из двух конформационных состояний, соответствующих тому, что мембранный канал открыт внутрь или наружу клетки. Переключения между состояниями (конформациями) осуществляется при протекании циклической реакции гидролиза АТФ, так что конформация определяется наличием или отсутствием фосфата, образующимся при гидролизе АТФ [30, 31]. Присутствие или отсутствие фосфата изменяет электрический потенциал внутри канала мембраны, с которым взаимодействует ион. Это даёт возможность искусственно управлять работой энзима. Если каким-то образом приостановить реакцию гидролиза АТФ (например, понижением температуры или уменьшением концентрации АТФ), то переход между конформациями можно осуществить посредством внешнего электрического поля, изменяющего трансмембранный потенциал. Экспериментально установлено [32, 33], что с помощью флуктуирующего внешнего электрического поля можно создать направленный транспорт ионов сквозь канал мембраны даже против градиента концентрации ионов. Позже было экспериментально доказано, что скорость прохождения ионов сквозь мембрану не зависит от концентрации АТФ, в то время как частота осцилляции внешнего поля существенно влияет на нее: например, скорость прохождения ионов  $\text{Rb}^+$  и  $\text{K}^+$  оказывается максимальной при частоте 1 кГц, а ионов  $\text{Na}^+$  – 1 МГц. Количественное описание рэтчет-эффекта, возникающего при циклическом включении и выключении электрического поля, проводилось в [15, 34].

Прототипом модели, в которой пространственно-периодический потенциал претерпевает смещения на полпериода (рис. 1), является двухголовый кинезин, движение которого вдоль микротрубочки состоит из периодически повторяющихся

циклов. Источником энергии для движения этого моторного белка против сил вязкого трения являются реакции связывания и гидролитического расщепления АТФ на АДФ (дифосфат аденозина) и неорганический фосфат ( $\text{ATP} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{ADP} + \text{P}_i + 20k_B T$ , где  $T \approx 300 \text{ K}$ ), так что каждый цикл дает энергетический выход  $20k_B T$  [35, 36]. Головы кинезина попеременно находятся в состояниях, когда одна из них контактирует с тубулином микротрубочки, а вторая, связанная с молекулой АДФ, удалена от микротрубочки и не имеет с ней контакта. За один шаг моторного белка вдоль микротрубочки каждая голова проходит расстояние длиной 2 димера тубулина (8 нм) и может развивать скорость около 800 нм/с, совершая работу против силы нагрузки до 5 пН [37, 38]. Особенности геометрии системы, а также идентичность голов кинезина и повторяемых ими шагов позволяют описывать движение этого двухголового белкового мотора, рассматривая одну голову в модельном потенциале микротрубочки, который стохастически совершает скачки на половину своего пространственного периода.

Отметим, что существуют, разумеется, и другие механизмы возникновения рэтчет-эффекта, например, связанные с синхронными флуктуациями симметричного потенциала и приложенной однородной силы (gating mechanism). Потенциальный профиль, выключенный и включенный при положительных и отрицательных значениях силы, соответственно, тормозит движение в отрицательном направлении, что приводит к результирующему положительно направленному потоку частиц даже в пространственно симметричном потенциале. Такой механизм осуществляется, например, в двумерном приповерхностном моторе, который совершает одновременно продольные и поперечные движения относительно плоскости полярной подложки вследствие флуктуаций наклонной к поверхности внешней силы [39–41].

Отдельный тип броуновских моторов – геометрические или энтропийные рэтчеты – связан с броуновским движением в трубках и каналах, сечение которых периодически меняется. В таких условиях энтропия

диффундирующей частицы определяется доступной для нее областью пространства, то есть зависит от координаты частицы на продольной оси канала. Энтропия частицы, умноженная на ее тепловую энергию, может рассматриваться как энтропийный потенциал [42], играющий роль обычного энергетического потенциала в задаче об одномерной диффузии. Согласно этой аналогии, периодические или случайные несмещенные воздействия на частицу в асимметричных трубках и каналах также могут приводить к возникновению рэтчет-эффекта [43, 44].

Учет квантовомеханических законов в моделях искусственных броуновских моторов приводит к обнаружению принципиально новых эффектов и неожиданных транспортных механизмов, возникающих вследствие подбарьерного туннелирования и надбарьерного отражения частицы, а также влияния ее инерции [12]. Первое теоретическое описание квантового рэтчета представлено в пионерской работе Рейманна, Грифони и Хангги [45], которые обнаружили целый ряд впечатляющих следствий квантовых эффектов. Так, средняя скорость направленного движения квантовых частиц была значительно выше, чем у тех же частиц при классическом описании. Особенно сильно это различие проявлялось в области низких температур, где скорость частиц в классическом рэтчете обращалась в ноль, а при квантовом описании оставалась ненулевой за счет подбарьерного туннелирования. Но самый удивительный результат учета квантовых эффектов состоял в обращении направления движения при понижении температуры, и этот теоретический вывод вскоре был подтвержден экспериментально [46]. В настоящее время рэтчет-эффект изучается и в таких системах, которые просто невозможно описать без квантовомеханической теории, например, в электронных рэтчетах и холодных атомах в оптических решетках [47]. Необычные проявления рэтчет-эффекта в чисто квантовых системах (связанных джозефсоновских переходах, квантовых точках, молекулярных проводках и т.д.) подробно рассмотрены в обзоре [12].

Вернемся к обсуждению рэтчет-эффекта, описываемого простыми моделями флуктуирующего потенциала (рис. 1) или

«каталитического колеса» (рис. 2). Переход от первой модели ко второй фактически является переходом от непрерывного движения частиц в потенциальном профиле к прыжковому движению между потенциальными ямами, которое становится возможным при достаточно низких температурах. В свою очередь, дискретное описание диффузии как переходов между узлами одномерной решетки имеет непосредственную связь с теорией парадоксальных игр Паррондо [19–25], в которых переходы между целочисленными значениями величины капитала игрока зависят от дискретного случайного процесса – бросков игральной кости. Возникновение рэтчет-эффекта в таких системах означает выигрыш, т.е. увеличение капитала (ср. с направленным движением или вращением) при периодическом чередовании двух игр с отличающимися правилами (отличающимися потенциальными профилями или каналами реакций), тогда как каждая из игр в отдельности к выигрышу не приводит. В следующем разделе предложен простейший вариант парадоксальной игры Паррондо и представлено его численное моделирование, которое с хорошей точностью воспроизводит результаты антисимметричной модели «каталитического колеса».

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ИГР И СРЕДНЕЕ ИЗМЕНЕНИЕ КАПИТАЛА

Простейшая игра, легко реализуемая программно, состоит в подбрасывании монетки с вероятностями выпадения орла и решки, равными  $p^w = p^l = 1/2$  (здесь и ниже верхние индексы  $w$  и  $l$  означают *выигрыш* и *проигрыш*, от английских слов *win* и *loss*, соответственно). Пусть начальное значение капитала равно нулю, выпадение орла будет увеличивать капитал на единицу, а выпадение решки – уменьшать на единицу. Тогда зависимость величины капитала  $n$  от числа бросков  $t$  изобразится ломаной линией (траекторией), начинающейся в нуле и удаляющейся от горизонтальной линии  $n = 0$  как в одну, так и другую сторону. Нас интересует не ход игры (последовательность бросков) отдельного игрока, а усредненная по многим игрокам (многим траекториям) зависимость величины капитала от числа

бросков,  $\langle n(t) \rangle$ , поскольку именно эта средняя характеристика позволяет выявить выигрышные стратегии игры. Равенство вероятностей выпадения орла и решки ( $p^w = p^l$ ) – простейший случай так называемой «честной игры», при которой среднее значение капитала не зависит от числа бросков монеты, если это число достаточно велико. Кроме того, при  $p^w = p^l$  имеет место более сильное свойство – симметрия относительно правил, регулирующих увеличение или уменьшение капитала: замена этих правил на противоположные (то, что предписывало выигрыш, теперь предписывает проигрыш, и наоборот) не изменяет ход игры. Определенные таким образом симметричные игры характеризуются неизменностью среднего капитала: если средний начальный капитал равнялся нулю ( $\langle n(0) \rangle = 0$ ), то и в последующие моменты времени (при последующих бросках) он будет оставаться не только постоянным, но и нулевым ( $\langle n(t) \rangle = 0$ ). Это означает, что ломаные линии, описывающие ход игры каждого игрока, с одинаковой вероятностью могут отклоняться от  $n = 0$  как в положительном, так и в отрицательном направлениях. В то же время среднее квадратичное отклонение  $\langle n^2(t) \rangle$  пропорционально  $t$ , по аналогии со свободной диффузией, при которой среднее квадратичное смещение частицы пропорционально прошедшему времени.

Рассмотрим теперь асимметричную игру. Пусть в состоянии с нечетным значением капитала (состояние 1) вероятность его увеличения на единицу (выигрыша) равна  $p_1^w$ , уменьшения на единицу (проигрыша) –  $p_1^l$ , а вероятность остаться с тем же капиталом равна  $1 - p_1^w - p_1^l$ . В состоянии с четным капиталом (состояние 2) значения аналогичных величин  $p_2^w$  и  $p_2^l$  будем считать отличными от значений в случае нечетного капитала. Можно показать, что условие честной игры, оставляющей неизменным средний капитал, формулируется как  $p_1^w p_2^w = p_1^l p_2^l$ . Для иллюстрации выберем значения, удовлетворяющие условию честной игры:

$$p_1^w = 0.2, \quad p_1^l = 0.3, \quad p_2^w = 0.54, \quad p_2^l = 0.36. \quad (1)$$

Рассматриваемая игра относится к асимметричным, т.к.  $p_1^w \neq p_1^l$ . В силу условия честной игры имеем также  $p_2^w \neq p_2^l$ . Геометрическая интерпретация асимметрии игры следует из аналогии со схемой движения броуновской частицы в асимметричном двухъямном периодическом потенциальном профиле (см. рис. 1): капитал игрока аналогичен координате частицы, а бросок игральной кости соответствует переходу между потенциальными ямами. По закону Аррениуса вероятности переходов из одной потенциальной ямы в другую пропорциональны экспоненте с показателем, равным отношению потенциального барьера к тепловой энергии  $k_B T$ , взятому с противоположным знаком. Поэтому, обозначив максимумы барьеров как  $v_\alpha, v_\beta$ , а минимум второй потенциальной ямы как  $u_2$  (величины измеряются в единицах  $k_B T$ , а ноль энергии выбран в минимуме первой ямы,  $u_1 = 0$ ), определим вероятности переходов следующим образом:

$$p_1^w = \exp(-v_\alpha), \quad p_1^l = \exp(-v_\beta),$$

$$p_2^w = \exp(-v_\beta + u_2), \quad p_2^l = \exp(-v_\alpha + u_2). \quad (2)$$

В свою очередь, из (2) можно выразить величины  $v_\alpha, v_\beta$  и  $u_2$  через вероятности  $p_{1(2)}^w$  и  $p_{1(2)}^l$  и получить численные значения, подставив в полученные выражения значения величин из (1):

$$u_2 = \ln(p_2^w / p_1^l) = 1.43, \quad v_\alpha = -\ln p_1^w = 2.32,$$

$$v_\beta = -\ln p_1^l = 1.74. \quad (3)$$

Именно параметры (3) использовались при построении потенциального профиля на рис. 1. Полученный профиль асимметричен, и соответствующая ему игра также асимметрична.

Обсуждаемую асимметричную игру можно осуществить следующим образом. Пусть начальный капитал игроков равен нулю, так что  $\langle n(0) \rangle = 0$ . Поскольку начальный капитал является четным числом, то игроку предлагается бросить игральную кость второго типа с параметрами  $p_2^w, p_2^l$ . Поскольку  $p_2^w + p_2^l = 0.9 < 1$ , то существует ненулевая вероятность того, что капитал

игрока не изменится и останется по-прежнему нулевым. Тогда ему снова будет предложено бросать игральную кость второго типа. Такие броски будут повторяться до тех пор, пока капитал игрока не изменится и станет нечетным. После этого игрок будет бросать кость уже первого типа с параметрами  $p_1^w, p_1^l$ . В зависимости от результата этого броска игрок снова будет играть костью первого или второго типа и так далее. Описанный алгоритм легко программируется на компьютере: на каждом шаге  $t$  (броске игральной кости) генератор случайных чисел выдает значение базовой случайной величины, равномерно распределенной на отрезке от нуля до единицы; оно проверяется на попадание в интервалы от 0 до  $p^w$ , от  $p^w$  до  $p^w + p^l$  и от  $p^w + p^l$  до 1. В первом случае игроку присуждается выигрыш с прибавлением одной денежной единицы к его текущему капиталу ( $n(t) := n(t-1) + 1$ ), во втором случае присуждается проигрыш с вычитанием одной денежной единицы ( $n(t) := n(t-1) - 1$ ), в третьем случае капитал игрока не изменяется ( $n(t) := n(t-1)$ ). Массив дискретных значений капитала игрока для всех шагов запоминается в памяти компьютера. После этого монету бросает второй игрок, третий и т.д. Для  $K$  игроков получается  $K$  траекторий  $n(t)$  (зависимостей капитала от числа бросков), которые затем усредняются для получения искомой средней зависимости капитала от числа бросков,  $\langle n(t) \rangle$ . На рис. 3 представлены результаты такого моделирования для различных типов игр при  $K = 3$  млн.

Симметричная игра с  $p^w = p^l = 1/2$  изображается горизонтальной линией  $\langle n(t) \rangle = 0$ , которая идет вдоль оси абсцисс (помечена круговыми маркерами). Асимметричная игра с параметрами (1) характеризуется средней траекторией, которая после нескольких биений в области малого числа бросков  $t$  выходит на постоянное значение 0.1286 при  $t > 5$  (ломаная с треугольными маркерами). Это смещенное (относительно нуля) значение может быть рассчитано с помощью дискретного аналога известной в теории броуновских моторов леммы Паррондо [48]. Она определяет перераспределение плотности вероятности, которое происходит

после мгновенного переключения потенциальных профилей за время релаксации системы (время установления равновесного конечного распределения в новом потенциальном профиле) при условии, что начальное распределение в исходном профиле было также равновесным. Именно наличие такого смещенного значения (дискретного аналога потока из леммы Паррондо) позволяет строить выигрышные стратегии на циклическом переключении различных типов игр.

Проиллюстрируем возможность такой стратегии с помощью игры, антисимметричной по отношению к игре (1), рассмотренной ранее. Изменим игральные кости так, что кость, которую бросали при нечетном значении капитала, теперь будут бросать при четном, и наоборот, что соответствует перемене местами индексов 1 и 2 в (1). Если использовать исходную игру  $\tau_+$  раз ( $\tau_+$  раз бросать кости по правилам исходной игры) и антисимметричную игру  $\tau_-$  раз, а затем циклически (с периодом цикла, равным  $\tau_+ + \tau_-$ ) продолжать этот процесс, то согласно антисимметричной модели каталитического колеса [15], при достаточно большом числе бросков средний выигрыш в расчете на один бросок (в единицу времени) определится формулой:

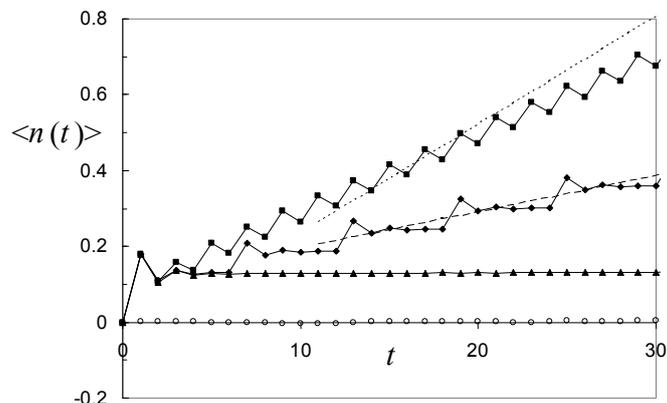
$$w = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle n(t) \rangle}{t} = \frac{2}{\tau_+ + \tau_-} \frac{(p_1^w - p_2^w)^2 - (p_1^l - p_2^l)^2}{(p_1^w + p_1^l + p_2^w + p_2^l)^2} = \frac{0.1142}{\tau_+ + \tau_-}. \quad (4)$$

Эта формула справедлива в адиабатическом приближении, которое в данной постановке задачи соответствует достаточно большим значениям  $\tau_+$  и  $\tau_-$ . Таким образом, при чередовании игр средний выигрыш линейно растет с числом бросков игральной кости, хотя каждая игра в отдельности характеризуется примерно нулевым выигрышем (изменением начального нулевого капитала на ненулевое значение, меньшее единицы, которое определяется суммарным результатом первых нескольких бросков).

Сопоставление результатов моделирования с теоретическим результатом (4)

показывает их хорошее согласие в случае  $\tau_+ = \tau_- = 6$ , когда уже оправданно адиабатическое приближение (ср. линию с ромбическими маркерами и штриховую линию на рис. 3). При  $\tau_+ = \tau_- = 2$  наблюдаем заметное расхождение результатов адиабатической теории и численного

эксперимента (ср. линию с квадратными маркерами и пунктирную линию на рис. 3). Это расхождение можно устранить, если использовать точные формулы (7), (8), (A1.8) из [15], которые дают меньшие значения  $w$  вне адиабатического приближения.



**Рис. 3.** Зависимости среднего капитала от числа бросков игральной кости. Горизонтальные линии с круговыми и треугольными маркерами соответствуют симметричной игре с  $p^w = p^l = 1/2$  и асимметричной игре с вероятностями, определенными формулой (1). Наклонные кривые с квадратными и ромбическими маркерами соответствуют смешанным играм видов  $[2;2]$   $[6;6]$ , где символами  $[\tau_+; \tau_-]$  обозначены циклы чередующихся антисимметричных игр, состоящих из  $\tau_+$  и  $\tau_-$  бросков игральных костей по правилам, соответственно, исходной асимметричной игры (1) и игры, антисимметричной к ней. Усреднение выполнено по 3 млн траекторий. Пунктирные и штриховые линии рассчитаны в адиабатическом приближении теории рэтчетов (по формуле (4) при  $\tau_+ + \tau_- = 4$  и 12, соответственно)

Обратим внимание, что ломаная линия, соответствующая  $\tau_+ + \tau_- = 12$ , претерпевает положительные скачки, увеличивающие средний капитал, как раз в моменты смены стратегий игры. Это подтверждает вывод о том, что рэтчет-эффект возникает именно благодаря дискретному аналогу элементарного процесса, рассмотренному в лемме Паррондо.

### ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Анализ публикаций, посвященных броуновским моторам, показывает, что большинство из них являются теоретическими и только малая их часть описывает реальные эксперименты. Это связано с большой чувствительностью рэтчет-систем к изменению любого параметра, так что теоретическое рассмотрение их свойств оказывается более простой задачей, чем разработка экспериментальных систем и интерпретация полученных данных. С другой стороны,

теоретические модели, как правило, сильно упрощены, т.к. пренебрегают многими факторами из-за вычислительных ограничений или невозможности получить аналитические решения. По этой причине они не могут быть непосредственно осуществлены на практике. К тому же следует иметь в виду, что экспериментальные системы всегда подвержены отклонениям от тех идеальных условий, которые предполагаются в теоретических моделях. Учитывая их высокую чувствительность к значениям параметров, можно утверждать, что даже небольшие изменения в форме потенциального профиля могут привести к полной потере рассматриваемого рэтчет-эффекта или к появлению рэтчета другого типа, связанного с иным видом асимметрии [49]. Авторы работы [47] лаконично сформулировали три основные теоретические задачи, решение которых может сократить разрыв между теорией и экспериментом. В-первых, следует изучить надежность

предлагаемых рэтчет-устройств относительно отклонений структурных и химических параметров реальных систем от модельных. Во-вторых, целесообразно было бы увеличить число параметров, управляющих рэтчет-эффектом, чтобы найти такие области их значений, которые обеспечивают устойчивые режимы работы. В-третьих, необходимо найти экспериментальные способы выявления альтернативных механизмов рэтчет-эффекта. Эти шаги должны привести к более тесному взаимодействию теории и эксперимента, в частности к разработке более совершенных моделей, которые будут опираться на экспериментальные тесты при выборе адекватных приближений (упрощений) в теоретических работах.

В данной статье представлен обобщенный взгляд на рэтчет-эффект на основе авторского подхода, объединившего модели флуктуирующего потенциала, каталитического колеса и электроконформационного сопряжения. Рассмотрено также неочевидное приложение этого подхода для расчета выигрыша, обусловленного сменой игровых стратегий в парадоксальных играх Паррондо. Для наглядности изложения и единообразного рассмотрения на первый взгляд различных рэтчет-систем мы предложили в качестве иллюстрации две асимметричные игры, в которых использование игровых костей зависит от четности или нечетности значения капитала, имеющегося у игрока перед очередным броском. Правила использования костей в этих играх меняются на противоположные при переходе от одной игры к другой, что делает игры антисимметричными. Зависимость среднего (по многочисленной группе игроков) выигрыша от количества бросков игровой кости была рассчитана путем компьютерного моделирования, а затем сопоставлена с результатом антисимметричной модели «каталитического колеса», справедливой в адиабатическом приближении. Хорошее согласие с теорией обнаружено как раз для того результата моделирования, который соответствует адиабатическому приближению. Кроме того, было показано, что положительные скачки

среднего капитала происходят в моменты смены стратегий игры; это согласуется с леммой Паррондо, которая объясняет возникновение рэтчет-эффекта элементарным (поддающимся расчету) перераспределением плотностей вероятностей при каждом переключении состояний адиабатического дихотомного процесса. Наблюдаемое изменение среднего капитала относительно начального (нулевого) значения при проведении только одной асимметричной игры также доказывает справедливость леммы Паррондо по отношению к дискретным аналогам рэтчет-систем.

Итак, нарушение пространственной симметрии и наличие неравновесных внешних процессов различной природы способны преобразовывать хаос в порядок: направленное движение частицы вдоль полярной подложки, потока ионов через биологическую мембрану, накопление капитала в теории игр и т.д. Без влияния хаоса (теплового движения молекул, конформационных переключений мембранных каналов или случайных бросков игровой кости) такое однонаправленное, т.е. упорядоченное, изменение было бы невозможно. В этом и состоит конструктивная роль хаоса в рассмотренных здесь (и не только этих) системах. В то же время интерпретация рэтчет-эффекта в терминах теории игр имеет ряд привлекательных моментов. Прежде всего, это наглядность обсуждаемого эффекта и выход его за пределы наномира (возможно, и в область экономики и социальных наук). Кроме того, это возможность изучения рэтчет-эффекта посредством вычислительного компьютерного эксперимента в той ситуации, когда аналитические результаты для непрерывных моделей слишком громоздки для получения количественных результатов. Учитывая количественные связи между вероятностями бросков игровой кости и параметрами эквивалентного потенциального рельефа, вдоль которого движется броуновская частица, мы получаем возможность исследовать закономерности функционирования броуновских моторов простыми модельными методами.

## Конструктивна роль хаоса: броунівські мотори й виграшні стратегії в теорії ігор

В.М. Розенбаум

*Інститут хімії поверхні ім. О.О. Чуйка Національної академії наук України  
вул. Генерала Наумова, 17, Київ, 03164, Україна, vik-roz@mail.ru*

*Незважаючи на широко поширене уявлення про негативну роль хаосу в природі та житті людини, існують приклади і його конструктивної ролі в різних процесах. Серед них особливе місце займають процеси, в яких тепловий шум викликає не тільки броунівський рух, а й дрейф наночастинок внаслідок незміщених (unbiased) нерівноважних збурень різної природи при порушенні просторової і/або часової симетрії системи. З такими процесами пов'язана дія броунівських моторів, або ретчетів, що активно вивчаються в останні десятиліття. У даній статті принципи функціонування подібних систем роз'яснюються на основі авторського підходу, який об'єднує розгляд різних проявів ретчет-ефекту в моделях флуктуючого потенціалу, каталітичного колеса й електроконформаційного спряження. Одним із таких проявів є запропоновані Паррондо парадоксальні ігри, в яких хаос проявляється у випадкових кидках грального кубика, а ретчет-ефект полягає в певній зміні стратегій гри, що забезпечує середній виграш. У даній статті запропоновано найпростіший варіант гри такого роду; він полягає в чергуванні антисиметричних ігор, у яких правила залежать від парності значення капіталу, наявного у гравця перед черговим кидком. Залежність середнього виграшу від кількості кидків грального кубика розраховано шляхом комп'ютерного моделювання і порівняно з результатом антисиметричної моделі «каталітичного колеса», справедливої в адіабатичному наближенні. Теоретичний виграш, розрахований за допомогою цієї моделі, добре узгоджується з результатом чисельного моделювання запропонованої гри. Привабливість інтерпретації ретчет-ефекту в термінах теорії ігор полягає в можливості наочно подати теоретичний апарат і дослідити закономірності функціонування броунівських моторів простими модельними методами.*

**Ключові слова:** броунівські мотори, ретчет-ефект, теорія ігор, конструктивна роль хаосу

## Constructive role of chaos: Brownian motors and winning strategies in game theory

V.M. Rozenbaum

*Chuiiko Institute of Surface Chemistry of National Academy of Sciences of Ukraine  
17 General Naumov Str., Kyiv, 03164, Ukraine, vik-roz@mail.ru*

*In spite of the widespread opinion about the negative effect of chaos on the nature and human life, there exist examples of its constructive role in various processes. Among them, a prominent position is occupied by the processes in which thermal noise causes not only Brownian motion but also drift of nanoparticles as a result of unbiased non-equilibrium perturbations of various nature in systems with broken spatial and/or temporal symmetry. Such processes are relevant to the operation of Brownian motors, or ratchets, actively studied in the past decades. In the present paper, the working principles of systems of this kind are explained based on the author's approach which unifies the treatment of different ratchet effect manifestations in the models of fluctuating potential, catalytic wheel, and electroconformational coupling. Another manifestation of this effect is provided by the paradoxical games proposed by Parrondo in which chaos appears in random tosses of a die and the ratchet effect arises from a certain alternation of game strategies ensuring an average win. The paper presents the simplest version of Parrondo's game; it consists in the alternation of two antisymmetric games, with the rules depending on the parity of the capital possessed by the player before the next toss. The dependence of the average win on the number of tosses is calculated by computer simulation and compared with the result of the catalytic wheel model valid in the adiabatic approximation. The theoretical win calculated by this model agrees well with the numerical simulation result for the game concerned. The attractiveness of the treatment of the ratchet effect in terms of game theory stems from the possibility to visualize the theoretical framework and to study the laws of Brownian motor operation by simple modelling methods.*

**Keywords:** Brownian motors, ratchet effect, game theory, constructive role of chaos

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранцев П.Г. Синергетика в современном естествознании. Серия «Синергетика: от прошлого к будущему», № 11. – Москва: Едиториал, УРСС, 2003. – 144 с.
2. Тасалов В.И. Хаос и порядок: социально-художественная диалектика. – Москва: Знание, 1990. – 64 с.
3. Валери П. Об искусстве. – Москва: Искусство, 1993. – 622 с.
4. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – Москва: Мир, 1985. – 420 с.
5. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики: Режимы с обострением, самоорганизация, темпомиры. – СПб.: Алетейя, 2002. – 414 с.
6. Plaza у Font, Joan Pere, Dandoy Régis. Chaos Theory and its Application in Political Science. IPSA – AISP World Congress (Fukuoka, Japan, 9–13 July 2006), <http://hdl.handle.net/2078.1/176425>
7. Котельников Г.А. Теоретическая и прикладная синергетика. – Белгород: БелГТАСМ; Крестьянское дело, 2000. – 164 с.
8. Кейнс Дж.М. Общая теория занятости, процента и денег. Избранное. – Москва: Эксмо, 2007. – 960 с.
9. Mann S.R. Chaos Theory and Strategic Thought // Parameters: US Army War College. – 1992. – V. XXII. – P. 54–68.
10. Cilla S., Flori L.M. Mirror symmetry breaking through an internal degree of freedom leading to directional motion // Phys. Rev. E. – 2001. – V. 63. – P. 031110.
11. Reimann P. Brownian Motors: Noisy Transport far from Equilibrium // Phys. Rep. – 2002. – V. 361, N 2–4. – P. 57–265.
12. Hänggi P., Marchesoni F. Artificial Brownian motors: Controlling transport on the nanoscale // Rev. Mod. Phys. – 2009. – V. 81, N 1. – P. 387–442.
13. Cubero D., Renzoni F. Brownian Ratchets: From Statistical Physics to Bio and Nanomotors. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2016. – 200 p.
14. Розенбаум В.М., Шапочкина И.В., Трахтенберг Л.И. Метод функций Грина в теории броуновских моторов // Успехи физ. наук. – 2019. – Т. 189, № 5. – С. 529–543.
15. Rozenbaum V.M., Yang D.-Y., Lin S.H., Tsong T.Y. Catalytic Wheel as a Brownian Motor // J. Phys. Chem. B. – 2004. – V. 108, N 40. – P. 15880–15889.
16. Tsong T.Y., Chang C.-H. Catalytic Wheel, Brownian Motor, and Biological Energy Transduction // AAPPS Bulletin. – 2003. – V. 13, N 2. – P. 12–18.
17. Tsong T.Y., Astumian R.D. Absorption and conversion of electric field energy by membrane bound ATPases // Bioelectrochem. Bioenerg. – 1986. – V. 15, N 3. – P. 457–476.
18. Astumian R.D.J. Adiabatic Theory for Fluctuation-Induced Transport on a Periodic Potentia // J. Phys. Chem. – 1996. – V. 100, N 49. – P. 19075–19081.
19. Harmer G.P., Abbott D. Losing strategies can win by Parrondo’s paradox // Nature. – 1999. – V. 402. – P. 864.
20. Harmer G.P., Abbott D. Parrondo’s paradox // Stat. Sci. – 1999. – V. 14, N 9. – P. 206–213.
21. Parrondo J.M.R., Harmer G.P., Abbott D. New paradoxical games based on Brownian ratchets // Phys. Rev. Lett. – 2000. – V. 85, N 4. – P. 5226–5229.
22. Toral R. Cooperative Parrondo’s games // Fluctuation and Noise Letters. – 2001. – V. 1, N 1. – P. L7–L12.
23. Allison A., Abbott D. The physical basis for Parrondo’s games // Fluctuation and Noise Letters. – 2002. – V. 2, N 4. – P. L327–L341.
24. Toral R., Amengual P., Mangioni S. Parrondo’s games as a discrete ratchet // Physica A. – 2003. – V. 327, N 1–2. – P. 105–110.
25. Parrondo J.M.R., Dinís L. Brownian motion and gambling: from ratchets to paradoxical games // Contemp. Phys. – 2004. – V. 45, N 2. – P. 147–157.
26. Skou J.C. The Identification of the Sodium-Potassium Pump (Nobel Lecture) // Angew. Chem. Int. Ed. Engl. – 1998. – V. 37, N 17. – P. 2321.
27. Tsong T.Y., Xie T.D. Ion pump as molecular ratchet and effects of noise: electric activation of cation pumping by Na,K-ATPase // Appl. Phys. A. – 2002. – V. 75, N 2. – P. 345–352.
28. Wuddel I., Apell H.-J. Electrogenicity of the sodium transport pathway in the Na,K-ATPase probed by charge-pulse experiments // Biophys. J. – 1995. – V. 69, N 3. – P. 909–921.
29. Rakowski R.F., Gadsby D. C., De Weer P. Voltage dependence of the Na/K pump // J. Membrane Biol. – 1997. – V. 155, N 2. – P. 105–112.
30. Hilgemann D.W. Channel-like function of the Na,K pump probed at microsecond resolution in giant membrane patches // Science. – 1994. – V. 263, N 5152. – P. 1429–1432.
31. Astumian R.D., Derenyi I. Fluctuation driven transport and models of molecular motors and pumps // Eur. Biophys. J. – 1998. – V. 27, N 5. – P. 474–489.

32. Liu D.S., Astumian R.D., Tsong T.Y. Activation of Na<sup>+</sup> and K<sup>+</sup> pumping mode of (Na,K)-ATPase by an oscillating electric field // J. Biol. Chem. – 1990. – V. 265, N 13. – P. 2760–2767.
33. Xie T.D., Marszalek P., Chen Y.-D., Tsong T.Y. Recognition and processing of randomly fluctuating electric signals by Na,KATPase // Biophys. J. – 1994. – V. 67, N 3. – P. 1247–1251.
34. Корочкова Т.Е., Розенбаум В.М. Молекулярный насос, управляемый флуктуациями электрического поля // Сб. Химия, физика и технология поверхности. – 2006. – Вып. 11, 12. – С. 29–40.
35. Leibler S., Huse D.A. Porters versus rovers: a unified stochastic model of motor proteins // J. Cell Biol. – 1993. – V. 121, N 6. – P. 1357–1368.
36. Gilbert S.P., Webb M.R., Brune M., Johnson K.A. Pathway of processive ATP hydrolysis by kinesin // Nature. – 1995. – V. 373. – P. 671–676.
37. Hunt A.J., Gittes F., Howard J. The force exerted by a single kinesin molecule against a viscous load // Biophys. J. – 1994. – V. 67, N 2. – P. 766–781.
38. Svoboda K., Block S.M. Force and velocity measured for single kinesin molecules // Cell. – 1994. – V. 77, N 5. – P. 773–784.
39. Rozenbaum V.M., Chernova A.A. Near-surface Brownian motor with synchronously fluctuating symmetric potential and applied force // Surf. Sci. – 2009. – V. 603, N 22. – P. 3297–3300.
40. Розенбаум В.М. Броуновские моторы в низкоэнергетическом приближении: классификация и свойства // ЖЭТФ. – 2010. – Т. 137, № 4. – P. 740–750.
41. Rozenbaum V.M., Makhnovskii Yu.A., Sheu S.-Y. et al. Two-state Brownian motor driven by synchronously fluctuating unbiased forces // Phys. Rev. E. – 2011. – V. 84, N 2. – P. 021104-1-8.
42. Zwangig R. Diffusion past an entropy barrier // J. Phys. Chem. – 1992. – V. 96, N 10. – P. 3926–3930.
43. Цицерман В.Ю., Махновский Ю.А., Трахтенберг Л.И. и др. Дрейф частиц, обусловленный флуктуациями их размера // Письма в ЖЭТФ. – 2017. – Т. 105, Вып. 5. – С. 315–321.
44. Makhnovskii Yu.A., Sheu S.-Y., Yang D.-Y., Lin S.H. Directed motion from particle size oscillations inside an asymmetric channel // J. Chem. Phys. – 2017. – V. 146. – P. 154103-1-10.
45. Reimann P., Grifoni M., Hänggi P. Quantum Ratchets // Phys. Rev. Lett. – 1997. – V. 79, N 1. – P. 10–13.
46. Linke H., Humphrey T.E., Lofgren A. et al. Experimental Tunneling Ratchets // Science. – 1999. – V. 286, N 5448. – P. 2314–2317.
47. Lau B., Kedem O., Schwabacher J. et al. An introduction to ratchets in chemistry and biology // Mater. Horiz. – 2017. – V. 4, N 3. – P. 310–318.
48. Parrondo J.M.R. Reversible ratchets as Brownian particles in an adiabatically changing periodic potential // Phys. Rev. E. – 1998. – V. 57, N 6. – P. 7297–7300.
49. Lau B., Kedem O., Ratner M.A., Weiss E.A. Identification of two mechanisms for current production in a biharmonic flashing electron ratchet // Phys. Rev. E. – 2016. – V. 93, N 6. – P. 062128-1-9.

## REFERENCES

1. Barantsev R.G. *Synergetics in modern science. Series "Synergetics: from the past to the future"*. N 11. (Moscow: Editorial, USSR, 2003). [in Russian].
2. Tsalolov V.I. *Chaos and order: social and artistic dialectics*. (Moscow: Znanie, 1990). [in Russian].
3. Valéry P. *On Art*. (Moscow: Iskusstvo, 1993). [in Russian].
4. Haken G. *Synergetics. Hierarchies of instabilities in self-organizing systems and devices*. (Moscow: Mir, 1985). [in Russian].
5. Knyazeva Ye.N., Kurdyumov S.P. *Fundamentals of synergetics: modes with escalation, self-organization, tempoworlds*. (SPb.: Aleteyya, 2002). [in Russian].
6. Plaza y Font, Joan Pere, Dandoy Régis. *Chaos Theory and its Application in Political Science*. IPSA – AISP World Congress (Fukuoka, Japan, 9– 3 July, 2006), <http://hdl.handle.net/2078.1/176425>
7. Kotelnikov G.A. *Theoretical and applied synergetics*. (Belgorod: BelGTASM, 2000). [in Russian].
8. Keynes J.M. *General Theory of Employment, Interest, and Money*. (London: Macmillan, for the Royal Economic Society, 1973).
9. Mann S.R. Chaos Theory and Strategic Thought. *Parameters: US Army War College*. 1992. **XXII**: 54.
10. Cilla S., Floria L.M. Mirror symmetry breaking through an internal degree of freedom leading to directional motion. *Phys. Rev. E*. 2001. **63**: 031110.
11. Reimann P. Brownian Motors: Noisy Transport far from Equilibrium. *Phys. Rep.* 2002. **361**(2–4): 57.

12. Hänggi P., Marchesoni F. Artificial Brownian motors: Controlling transport on the nanoscale. *Rev. Mod. Phys.* 2009. **81**(1): 387.
13. Cubero D., Renzoni F. *Brownian Ratchets: From Statistical Physics to Bio and Nanomotors*. (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2016).
14. Rozenbaum V.M., Shapochkina I.V., Trakhtenberg L.I. Green's function method in the theory of Brownian motors. *Physics-Uspokhi*. 2019. **62**(5): 496.
15. Rozenbaum V.M., Yang D.-Y., Lin S.H., Tsong T.Y. Catalytic Wheel as a Brownian Motor. *J. Phys. Chem. B*. 2004. **108**(40): 15880.
16. Tsong T.Y., Chang C.-H. Catalytic Wheel, Brownian Motor, and Biological Energy Transduction. *AAPPS Bulletin*. 2003. **13**(2): 12.
17. Tsong T.Y., Astumian R.D. Absorption and conversion of electric field energy by membrane bound ATPases. *Bioelectrochem. Bioenerg.* 1986. **15**(3): 457.
18. Astumian R.D. Adiabatic Theory for Fluctuation-Induced Transport on a Periodic Potential. *J. Phys. Chem.* 1996. **100**(49): 19075.
19. Harmer G.P., Abbott D. Losing strategies can win by Parrondo's paradox. *Nature*. 1999. **402**: 864.
20. Harmer G.P., Abbott D. Parrondo's parado. *Stat. Sci.* 1999. **14**(9): 206.
21. Parrondo J.M.R., Harmer G.P., Abbott D. New paradoxical games based on Brownian ratchets. *Phys. Rev. Lett.* 2000. **85**(4): 5226.
22. Toral R. Cooperative Parrondo's games. *Fluctuation and Noise Letters*. 2001. **1**(1): L7.
23. Allison A., Abbott D. The physical basis for Parrondo's games. *Fluctuation and Noise Letters*. 2002. **2**(4): L327.
24. Toral R., Amengual P., Mangioni S. Parrondo's games as a discrete ratchet. *Physica A*. 2003. **327**(1–2): 105.
25. Parrondo J.M.R., Dinis L. Brownian motion and gambling: from ratchets to paradoxical games. *Contemp. Phys.* 2004. **45**(2): 147.
26. Skou J.C. The Identification of the Sodium-Potassium Pump (Nobel Lecture). *Angew. Chem. Int. Ed. Engl.* 1998. **37**(17): 2321.
27. Tsong T.Y., Xie T.D. Ion pump as molecular ratchet and effects of noise: electric activation of cation pumping by Na,K-ATPase. *Appl. Phys. A*. 2002. **75**(2): 345.
28. Wuddel I., Apell H.-J. Electrogenicity of the sodium transport pathway in the Na,K-ATPase probed by charge-pulse experiments. *Biophys. J.* 1995. **69**(3): 909.
29. Rakowski R.F., Gadsby D. C., De Weer P. Voltage dependence of the Na/K pump. *J. Membrane Biol.* 1997. **155**(2): 105.
30. Hilgemann D. W. Channel-like function of the Na,K pump probed at microsecond resolution in giant membrane patches. *Science*. 1994. **263**(5152): 1429.
31. Astumian R.D., Derenyi I. Fluctuation driven transport and models of molecular motors and pumps. *Eur. Biophys. J.* 1998. **27**(5): 474.
32. Liu D.S., Astumian R.D., Tsong T.Y. Activation of Na<sup>+</sup> and K<sup>+</sup> pumping mode of (Na,K)-ATPase by an oscillating electric field. *J. Biol. Chem.* 1990. **265**(13): 2760.
33. Xie T.D., Marszalek P., Chen Y.-D., Tsong T.Y. Recognition and processing of randomly fluctuating electric signals by Na,KATPase. *Biophys. J.* 1994. **67**(3): 1247.
34. Korochkova T.E., Rosenbaum V.M. A molecular pump controlled by electric field fluctuations. *Coll. Chemistry, physics and technology of surface*. 2006. **11**, **12**: 29. [in Russian].
35. Leibler S., Huse D.A., Porters versus rovers: a unified stochastic model of motor proteins. *J. Cell Biol.* 1993. **121**(6): 1357.
36. Gilbert S.P., Webb M.R., Brune M., Johnson K.A. Pathway of processive ATP hydrolysis by kinesin. *Nature*. 1995. **373**: 671.
37. Hunt A.J., Gittes F., Howard J. The force exerted by a single kinesin molecule against a viscous load. *Biophys. J.* 1994. **67**(2): 766.
38. Svoboda K., Block S.M. Force and velocity measured for single kinesin molecules. *Cell*. 1994. **77**(5): 773.
39. Rozenbaum V.M., Chernova A.A. Near-surface Brownian motor with synchronously fluctuating symmetric potential and applied force. *Surf. Sci.* 2009. **603**(22): 3297.
40. Rozenbaum V.M. Brownian motors in the low-energy approximation: classification and properties. *J. Exp. Theor. Phys.* 2010. **110**(4): 653.
41. Rozenbaum V.M., Makhnovskii Yu.A., Sheu S.-Y., Yang D.-Y., Lin S.H. Two-state Brownian motor driven by synchronously fluctuating unbiased forces. *Phys. Rev. E*. 2011. **84**(2): 021104.
42. Zwangig R. Diffusion past an entropy barrier. *J. Phys. Chem.* 1992. **96**(10): 3926.
43. Zitserman V.Yu., Makhnovsky Yu.A., Trakhtenberg L.I., Young D.E., Lin Sh.K. Drift of particles caused by fluctuations of their sizes. *JETP Lett.* 2017. **105**(5): 335.

44. Makhnovskii Yu.A., Sheu S.-Y., Yang D.-Y., Lin S.H. Directed motion from particle size oscillations inside an asymmetric channel. *J. Chem. Phys.* 2017. **146**: 154103.
45. Reimann P., Grifoni M., Hänggi P. Quantum Ratchets. *Phys. Rev. Lett.* 1997. **79**(1): 10.
46. Linke H., Humphrey T.E., Lofgren A., Sushkov A.O., Newbury R., Taylor R.P., Omling P. Experimental Tunneling Ratchets. *Science*. 1999. **286**(5448): 2314.
47. Lau B., Kedem O., Schwabacher J., Kwasnieski D., Weiss E.A. An introduction to ratchets in chemistry and biology. *Mater. Horiz.* 2017. **4**(3): 310.
48. Parrondo J.M.R. Reversible ratchets as Brownian particles in an adiabatically changing periodic potential. *Phys. Rev. E*. 1998. **57**(6): 7297.
49. Lau B., Kedem O., Ratner M.A., Weiss E.A. Identification of two mechanisms for current production in a biharmonic flashing electron ratchet. *Phys. Rev. E*. 2016. **93**(6): 062128.

Получена 25.12.2019, принята 14.02.2020